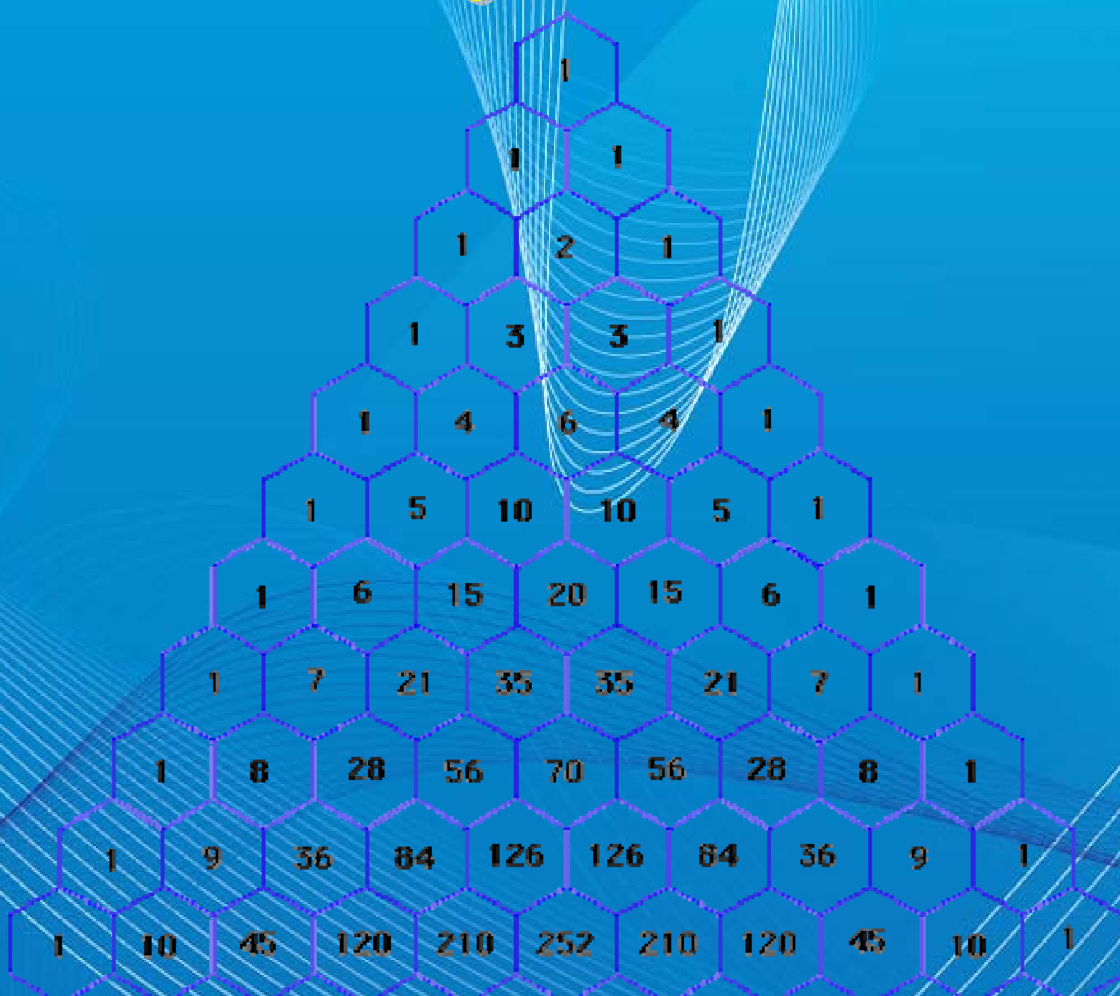
រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

គណិតវិទ្យាពាណិជ្ជកម្ម



អនុគមន៍មួយអថេរ និង ការអនុវត្ត

(MONOVARIABLE FUNCTION)

1 -និយមន័យ :

☞ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ f ពីសំណុំ E ទៅសំណុំ F ជាអនុគមន៍កាលណាគ្រប់ធាតុ x នៃសំណុំ E មានរូបភាព y យ៉ាងច្រើនមួយ នៃសំណុំ F ។

គេកំនត់សរសេរ : $f : E \mapsto F$

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

☞ ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ f គឺជាសំណុំនៃធាតុដើម ដែលមានរូបភាពតាមអនុគមន៍ f

គេកំនត់សរសេរ : $D = \{ \ \forall x \in E \ , \exists y \in F \ / \ y = f(x) \ \}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូររកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $y = f(x) = (2x+3)e^{-\frac{x^2}{2}} \ln x$

អនុគមន៍នេះអាចកំនត់បានលុះត្រាតែ $x > 0$ ។ ដូចនេះ $D = \left] 0 , +\infty \right[$ ។

២ -ដេរីវេនៃអនុគមន៍ :

ក. និយមន័យ : ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ f កំនត់លើចន្លោះ I ហើយ x_0 ជាចំនួនពិតនៅក្នុងចន្លោះ I និង h ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យដែល $x_0 + h$ នៅក្នុងចន្លោះ I ។

ចំនួនដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ចំនុច x_0 (បើមាន) ជាលីមីតនៃផលធៀបរវាងអត្រាកំណើន $\Delta y = f(x_0+h) - f(x_0)$ ជាមួយនឹង $\Delta x = (x_0+h) - x_0 = h$ កាលណា Δx ខិតទៅរកសូន្យ ។ គេកំនត់សរសេរ $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{U(x)}{V(x)}$ ។

ប្រើនិយមន័យចូរបង្ហាញថា $y'_0 = f'(x_0) = \dfrac{U'(x_0)V(x_0) - V'(x_0)U(x_0)}{V^2(x_0)}$ ។

គេបាន $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{U(x_0+h)}{V(x_0+h)}-\frac{U(x_0)}{V(x_0)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{U(x_0+h)V(x_0)-U(x_0)V(x_0+h)}{h\,V(x_0+h)V(x_0)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[U(x_0+h)V(x_0)-U(x_0)V(x_0)\right]-\left[U(x_0)V(x_0+h)-U(x_0)V(x_0)\right]}{h\,V(x_0+h)V(x_0)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{U(x_0+h)-U(x_0)}{h}.\frac{1}{V(x_0+h)}\right)-\left(\frac{V(x_0+h)-V(x_0)}{h}.\frac{U(x_0)}{V(x_0+h)V(x_0)}\right)\right]$$

$$=U'(x_0).\frac{1}{V(x_0)}-V'(x_0).\frac{U(x_0)}{V^2(x_0)}=\frac{U'(x_0)V(x_0)-V'(x_0)U(x_0)}{V^2(x_0)}$$

ដូចនេះ $\boxed{y'_0=f'(x_0)=\frac{U'(x_0)V(x_0)-V'(x_0)U(x_0)}{V^2(x_0)}}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=a^x$ ដែល $a>0, a\neq 1$ ។

ដោយប្រើនិយមន័យចូរបង្ហាញថា $y'_0=f'(x_0)=a^{x_0}.\ln a$

គេបាន $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}a^{x_0}\frac{a^h-1}{h}=a^{x_0}.\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^{x_0}.\ln a$$

(ពីព្រោះ $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$) ។

ដូចនេះ $\boxed{y'_0=f'(x_0)=a^{x_0}.\ln a}$ ។

ខ. រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍សំខាន់ៗ និង រូបមន្តគ្រឹះ

1. $y=ax^n \Rightarrow y'=n\,a\,x^{n-1}$ ដែល $a\in IR$
2. $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $y=\frac{a}{x} \Rightarrow y'=-\frac{a}{x^2}$ ដែល $a\in IR$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

4. $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$ ($e = 2.7182818...$ ជាគោលលោការីតនេពែ)

5. $y = e^{ax} \Rightarrow y' = a\, e^{ax}$ ដែល $a \in IR$

6. $y = a^x \Rightarrow y' = a^x .\ln a$ ដែល $a > 0$ ។

7. $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

8. $y = \ln(ax + b) \Rightarrow y' = \frac{a}{ax + b}$

9. $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x.\ln a}$ ដែល $a > 0$, $a \neq 1$ ។

10. $y = u + v - w \Rightarrow y' = u' + v' - w'$

11. $y = u^n \Rightarrow y' = n\, u'\, u^{n-1}$

12. $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

13. $y = u.v \Rightarrow y' = u'v + v'u$

14. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

15. $y = \frac{1}{v} \Rightarrow y' = -\frac{v'}{v^2}$

16. $y = e^u \Rightarrow y' = u'\, e^u$

17. $y = a^u \Rightarrow y' = u'\, a^u \ln a$

18. $y = u^v \Rightarrow y' = u'v\, u^{v-1} + v'\, u \ln u$

ឧទាហរណ៍ : ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = e^{\frac{1+\ln x}{x}}$ ដែល $x > 0$ ។

តាមរូបមន្ត $(e^U)' = U'.e^U$ គេបាន :

$$y' = \left(\frac{1 + \ln x}{x}\right)' e^{\frac{1+\ln x}{x}} = \frac{(1 + \ln x)'x - (x)'(1 + \ln x)}{x^2}.e^{\frac{1+\ln x}{x}} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2}.e^{\frac{1+\ln x}{x}}$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = -\frac{\ln x}{x^2}.e^{\frac{1+\ln x}{x}}}$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ឧទាហរណ៍ ៖ ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{x^2-4x}$

គេបាន $\ln y = \ln\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{x^2-4x}$ (រូបមន្ត $\ln U^V = V\ln U$, $\ln\dfrac{U}{V} = \ln U - \ln V$)

$$\ln y = (x^2 - 4x)\left[\ln(\ln x) - \ln x\right]$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\frac{y'}{y} = (2x-4)(\ln\ln x - \ln x) - \left(\frac{1}{x\ln x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$y' = \left[(2x-4)(\ln\ln x - \ln x) - \left(\frac{1}{x\ln x} - \frac{1}{x}\right)\right].y$$

ដូចនេះ $\boxed{y' = f'(x) = \left[2(x-2)(\ln\ln x - \ln x) - \dfrac{1-\ln x}{x\ln x}\right].(\dfrac{\ln x}{x})^{x^2-4x}}$

គ. ដេរីវេបន្តបន្ទាប់

ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទី n លើចន្លោះ I ។

ដែលហៅថាអនុគមន៍ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺជាអនុគមន៍កំនត់តាងដោយ ៖

$$y^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$ ដែល $n \in IN^*$ ។

ឃ. រូបមន្តដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ផលគុណ ៖

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $y = u.v$ ដែល u និង v ជាអនុគមន៍ពីរ ។

គេមាន $y' = u'v + v'u$ (1 - 1)

$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$ (1 - 2 - 1)

$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$ (1- 3 - 3 - 1)

$y^{(4)} = u^{(4)}v + 4u^{(3)}v' + 6u''v'' + 4u'v^{(3)} + uv^{(4)}$ (1 - 4 - 6 - 4 - 1)

ដូចនេះគេបានរូបមន្តទូទៅ ៖

$$\boxed{y^{(n)} = (u.v)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots\dots\dots + C_n^{n-1}u'v^{(n-1)} + C_n^n uv^{(n)}}$$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

៧ -អនុវត្តន៍ដេរីវេនៃអនុគមន៍ :

ក. អនុគមន៍ចំណាយម៉ាជីណាល (Marginal Cost Function)

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ចំណាយសរុប (Total Cost Function) មួយកំនត់ដោយ :

$TC = TC(x)$ ដែល x តាងឱ្យបរិមាណផលិតផលដែលត្រូវផលិត ។

ដែលហៅថា Marginal Cost Function គឺជាអនុគមន៍ដេរីវេនៃ Total Cost Function

គេកំនត់តាងដោយ $MC = MC(x) = \dfrac{dTC(x)}{dx} = TC'(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ : ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ចំណាយសរុបមួយកំនត់ដោយ :

$TC(x) = 4x^3 - 12x^2 + 15x + 100$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលត្រូវផលិត ។

ក. ចូរកំនត់រក Marginal cost function

ខ. ចូរកំនត់រក Marginal cost ត្រង់ចំនុច $x = 20$ units ។

ដំណោះស្រាយ :

ក. រក Marginal cost function

គេមាន $TC(x) = 4x^3 - 12x^2 + 15x + 100$

គេបាន $MC(x) = TC'(x) = (4x^3 - 12x^2 + 15x + 100)' = 12x^2 - 24x + 15$

ដូចនេះ $\boxed{MC(x) = 3(4x^2 - 8x + 5)}$ ។

ខ. កំនត់រក Marginal cost ត្រង់ចំនុច $x = 20$ units

គេបាន $MC(20) = 12.20^2 - 24.20 + 15 = 4335$ ។

មានន័យថា បើគេផលិតបន្ថែម 1 ឯកតាទី 21 នោះគេត្រូវចំណាយបន្ថែម4335 ឯកត្តារូបិយវត្ថុ ។

ខ. អនុគមន៍ចំណូលម៉ាជីណាល (Marginal Revenue Function)

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ចំណូលសរុប (Total Revenue Function) មួយកំនត់ដោយ :

$TR = TR(x)$ ដែល x តាងឱ្យបរិមាណផលិតផលដែលត្រូវលក់ ។

ដែលហៅថា Marginal Revenue Function គឺជាអនុគមន៍ដេរីវេនៃ

Total Revenue Function គេកំនត់តាងដោយ $MR = MR(x) = \frac{dTR(x)}{dx} = TR'(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ : ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលសរុបមួយកំនត់ដោយ :

$TR(x) = 40x - 0.02x^2$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលត្រូវលក់ ។

ក. ចូរគណនា $TR(1000)$ រួចពន្យល់ពីលទ្ធផលនេះ ?

ខ. ចូរកំនត់រក Marginal Revenue Function

គ. ចូរកំនត់រក Marginal Revenue Function ត្រង់ $x = 100\,\text{units}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $TR(1000)$ រួចពន្យល់ពីលទ្ធផលនេះ

គេមាន $TR(x) = 40x - 0.02x^2$

គេបាន $TR(1000) = 40.1000 - 0,02 \times 1000^2 = 40000 - 20000 = 20\,000$

ដូចនេះ $TR(1000) = 20\,000$ (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។ លទ្ធផលនេះមានន័យថាកាលណាគេលក់ផលិតផលចំនួន 1000 units នោះគេនឹងទទួលបានប្រាក់ចំនូលសរុប 20000 (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

ខ. កំនត់រក Marginal Revenue Function

គេមាន $TR(x) = 40x - 0.02x^2$

គេបាន $MR(x) = TR'(x) = (40x - 0.02x^2)' = 40 - 0.04x$

ដូចនេះ $\boxed{MR(x) = 40 - 0.04x}$

គ. កំនត់រក Marginal Revenue Function ត្រង់ $x = 100\,\text{units}$

គេបាន $MR(100) = 40 - 0.04(100) = 40 - 4 = 36$ ។

មានន័យថាបើគេលក់បន្ថែម 1ឯកតាទៀត (ឯកតាទី101) នោះប្រាក់ចំនូលនឹងកើនឡើងចំនួន 36 ឯកតារូបិយវត្ថុ ។

គ. អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញម៉ាជីណល (Marginal Profit Function)

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប (Total Profit Function) មួយកំនត់ដោយ:

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

$TP = TP(x)$ ដែល x តាងឱ្យបរិមាណផលិតផលដែលត្រូវលក់ ។

ដែលហៅថា Marginal Profit Function គឺជាអនុគមន៍ដេរីវេនៃ

Total Profit Function គេកំនត់តាងដោយ $MP = MP(x) = \frac{dTP(x)}{dx} = TP'(x)$ ។

ឧទាហរណ៍: ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុបមួយកំនត់ដោយ :

$TP(x) = 50\sqrt{x^2 + 225} - \frac{x}{2} - 750$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលត្រូវលក់ ។

ក. ចូររក $TP(8)$ រួចពន្យល់ពីលទ្ធផលនេះ ។

ខ. ចូររក Marginal Profit Function.

គ. ចូររក Marginal Profit Function ត្រង់ចំនុច $x = 20$ units ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រក $TP(8)$ រួចពន្យល់ពីលទ្ធផលនេះ

គេបាន $TP(8) = 50\sqrt{8^2 + 225} - \frac{8}{2} - 750 = 96$

ដូចនេះ $TP(8) = 96$ (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។ លទ្ធផលនេះមានន័យថាកាលណាគេលក់ផលិតផល

ចំនួន 8 ឯកតាគេនឹងទទួលបានប្រាក់ចំនេញ 96 (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

ខ. រក Marginal Profit Function.

គេមាន $TP(x) = 50\sqrt{x^2 + 225} - \frac{x}{2} - 750$

គេបាន $MP(x) = TP'(x) = 50\frac{(x^2 + 225)'}{2\sqrt{x^2 + 225}} - \frac{1}{2} = \frac{50}{\sqrt{x^2 + 225}} - \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{MP(x) = \frac{50}{\sqrt{x^2 + 225}} - \frac{1}{2}}$ ។

គ. រក Marginal Profit Function ត្រង់ចំនុច $x = 20$ units

គេបាន $MP(20) = \frac{50}{\sqrt{20^2 + 225}} - \frac{1}{2} = \frac{50}{\sqrt{625}} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.50$ ។

មានន័យថាបើគេលក់បន្ថែម 1 ឯកតា ទី 21 នោះគេបានប្រាក់ចំនេញ 1.50 (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

៩-បរមាកម្មនៃអនុគមន៍ (Optimization)

នៅក្នុងប្រតិបត្តិការអាជីវកម្ម គេច្រើនជួបនូវបញ្ហានៅចំពោះមុខដែលត្រូវដោះស្រាយ ហើយរាល់ដំណោះស្រាយទាំងនោះគេតែងចង់បានជានិច្ចនូវដំណោះស្រាយដែលប្រសើរបំផុត (Optimal solution) ដូចជា :

- ការកំនត់បរិមាណផលិតផលដែលត្រូវលក់ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំនូលសរុប (Total Revenue)ឬ ប្រាក់ចំណេញសរុប (Total Profit) អតិបរមា ។

-កំនត់បរិមាណផលិតផលដែលត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំនាយមធ្យមក្នុង១ឯកតាអប្បបរមា

បញ្ហាទាំងអស់នេះគេអាចបកស្រាយបានតាមគណិតវិទ្យាដោយប្រើបរមាកម្មនៃអនុគមន៍។

☞ វិធីកំនត់រកបរមានៃអនុគមន៍មានមួយអថេរ :

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $y = f(x)$ ។

ដើម្បីកំនត់រកបរមានៃអនុគមន៍នេះគេត្រូវ :

1-គណនាដេរីវេទីមួយ $y' = f'(x)$

2-រកឬសរបស់សមីការ $f'(x) = 0$ ឧបមាថាវាមានឬស $x = x_0$

3-គណនាដេរីវេទីពីរ $y'' = f''(x)$ រួចរកតម្លៃលេខនៃ $y''_0 = f''(x_0)$

សន្និដ្ឋាន :

-បើ $f''(x_0) < 0$ នោះអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = x_0$ ។

-បើ $f''(x_0) = 0$ (មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន) ។

-បើ $f''(x_0) > 0$ នោះអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x = x_0$ ។

❀ រំលឹកសមីការដឺក្រេទីពីរ : $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in IR$

ដើម្បីរកចម្លើយសមីការនេះគេត្រូវ :

-គណនាបរិមាណ $\Delta = b^2 - 4ac$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

-បើ $\Delta > 0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

-បើ $\Delta = 0$ សមីការមានឫសឌុបគឺ $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ ។

-បើ $\Delta < 0$ សមីការគ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនពិត ។

ឧទាហរណ៍ : ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលសរុប $TR(x) = 13500x - 60x^2 - x^3$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលគេត្រូវលក់ ។

តើគេត្រូវលក់ផលិតផលនេះប៉ុន្មានឯកតាដើម្បីឱ្យបានចំនូលសរុបអតិបរមា ?

ចូរកំនត់ប្រាក់ចំនូលអតិបរមានោះ ?

ដំណោះស្រាយ

-គណនាដេរីវេទីមួយ $TR'(x) = 13500 - 120x - 3x^2$

-ដោះស្រាយសមីការ $TR'(x) = 0$ នាំឱ្យ $-3x^2 - 120x + 13500 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-60)^2 - (-3)(13500) = 44100 = 210^2$

គេទាញឫស $x_1 = \dfrac{60-210}{-3} = 50$, $x_2 = \dfrac{60+210}{-3} = -90 < 0$ (មិនយក)

-គណនាដេរីវេទីពីរ $TR''(x) = -120 - 6x$

ដោយ $TR''(50) = -120 - 6(50) = -420 < 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = 50$ មានន័យថាដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំនូលសរុបអតិបរមាគេត្រូវលក់ផលិតផលចំនួន 50 units ហើយប្រាក់ចំនូលសរុបអតិបរមានោះគឺ $TR(50) = 400{,}000$ (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

ឧទាហរណ៍: ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលសរុប $TR(x) = 12600x$ និងអនុគមន៍ប្រាក់ចំនាយសរុប $TC(x) = 6000 + 15x^2 + x^3$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផល ។

ចូរកំនត់បរិមាណផលិតផលដែលត្រូវលក់ដើម្បីឱ្យបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា ?

ចូរកំនត់រកប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះ ?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\text{Total Profit} = \text{Total Revenue} - \text{Total Cost}$

គេបាន $TP(x) = 12600x - \left(6000 + 15x^2 + x^3\right) = -x^3 - 15x^2 + 12600x - 6000$

-គណនាដេរីវេទីមួយ $TP'(x) = -3x^2 - 30x + 12600$

-ដោះស្រាយសមីការ $TP'(x) = 0$ នាំឱ្យ $-3x^2 - 30x + 12600 = 0$

គណនា $\Delta' = (-15)^2 - (-3)(12600) = 225 + 37800 = 38025 = 195^2$

គេទាញឫស $x_1 = \dfrac{15 - 195}{-3} = 60$, $x_2 = \dfrac{15 + 195}{-3} = -70 < 0$ (មិនយក)

-គណនាដេរីវេទីពីរ $TP''(x) = -6x - 30$ ។

ដោយ $TP''(60) = -6(60) - 30 < 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = 60$ ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំនេញអតិបរមាលុះត្រាតែគេលក់ផលិតផលចំនួន 60 units ។

ប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះគឺ $TP(60) = 480{,}000$ (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

ឧទាហរណ៍ : ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតមួយកំនត់ដោយ :

$TC(x) = \dfrac{x^2}{9} + 2x + 2500$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលបានផលិត ។

តើគេត្រូវផលិតផលិតផលនេះប៉ុន្មានឯកតាដើម្បីឱ្យចំនាយមធ្យមអប្បបរមា ?

ចូររកប្រាក់ចំនាយអប្បបរមានោះ ?

SOLUTION: -គេត្រូវផលិតចំនួន 150 units

-ចំនាយមធ្យមអប្បបរមាក្នុង1ឯកតាគឺ 35.33 (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

៥-អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ (Indefinite integrals)

ក-និយមន័យ : អាំងតេក្រាលមិនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ គឺជាសំណុំនៃព្រីមីទីវទាំងអស់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលគេកំនត់សរសេរ : $\int f(x).dx = F(x) + c$ ។

ដែល c ជាចំនួនថេរ ហើយ $F'(x) = f(x)$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ខ-រូបមន្តអាំងតេក្រាលមិនកំនត់សំខាន់ៗ :

1. $\int x^n.dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ ដែល $n \neq -1$, $c \in IR$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

3. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

5. $\int e^x.dx = e^x + c$

6. $\int e^{ax}.dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$ ដែល $a \neq 0$ ។

7. $\int a^x .dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ ដែល $a > 0$, $a \neq 1$ ។

គ-លក្ខណះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំនត់ :

1. $\int k f(x) dx = k \int f(x)\, dx$

2. $\int [f(x) + g(x) - h(x)].dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx - \int h(x).dx$

ឃ-រូបមន្តអាំងតេក្រាលប្តូរអថេរ :

1. ឧបមាថា $I = \int f(x).dx$ បើគេតាង $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t).dt$

   គេបានរូបមន្ត $I = \int f(x).dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t).dt$ ។

2. ឧបមាថា $I = \int f[\phi(x)].\phi'(x).dx$ បើគេតាង $u = \phi(x) \Rightarrow du = \phi'(x).dx$

   គេបានរូបមន្ត $I = \int f[\phi(x)].\phi'(x).dx = \int f(u).du$ ។

ង-រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក :

គេមាន $d(u\,v) = v\,du + u\,dv$

គេទាញ $u\,dv = d(u\,v) - v\,du$

$$\int udv = \int d(u\ v) - \int vdu = uv - \int vdu$$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ដូចនេះ $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{4x^5 - 2x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^2}.dx$

គេបាន $I = \int \left(4x^3 - 2x^2 + 3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right).dx$

$= 4\int x^3dx - 2\int x^2dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2}$

$= 4\left(\frac{x^4}{4}\right) - 2\left(\frac{x^3}{3}\right) + \ln|x| + \frac{1}{x} + c$

ដូចនេះ $\boxed{I = x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \ln|x| + \frac{1}{x} + c}$ ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{4x^7.dx}{x^4 + 1}$

តាង $t = x^4 + 1 \Rightarrow dt = 4x^3.dx$ និង $x^4 = t - 1$

គេបាន $I = \int \frac{x^4.(4x^3dx)}{x^4 + 1} = \int \frac{(t-1)dt}{t} = \int \left(1 - \frac{1}{t}\right).dt = \int dt - \int \frac{dt}{t} = t - \ln|t| + c$

ដូចនេះ $\boxed{I = x^4 + 1 - \ln\left(x^4 + 1\right) + c}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{x\ln x}$

គេមាន $I = \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\ln x}$ តាង $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c$

ដូចនេះ $\boxed{I = \ln|\ln x| + c}$ ។

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (4x+1)e^{2x}.dx$

តាង $\begin{cases} u = 4x + 1 \\ dv = e^{2x}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

គេបាន $I = \frac{1}{2}(4x+1)e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}.4dx = \frac{1}{2}(4x+1)e^{2x} - \int 2e^{2x}.dx$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

$$=\frac{1}{2}(4x+1)e^{2x}-e^{2x}+c=\frac{1}{2}(4x-1)e^{2x}+c$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\frac{1}{2}(4x-1)e^{2x}+c}$ ។

ឧទាហរណ៍ : $I=\int x^2e^x.dx$

តាង $\begin{cases}u=x^2\\ dv=e^x.dx\end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases}du=2x.dx\\ v=e^x\end{cases}$

$$=x^2e^x-\int 2xe^x.dx$$

តាង $\begin{cases}u=2x\\ dv=e^x.dx\end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases}du=2.dx\\ v=e^x\end{cases}$

$$=x^2e^x-\left[2xe^x-\int 2e^x.dx\right]$$

$$=x^2e^x-2xe^x-2e^x+c$$

$$=(x^2-2x-2)e^x+c$$

ឧទាហរណ៍ : គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int x^3\ln x.dx$

តាង $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=x^3.dx\end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases}du=\frac{1}{x}.dx\\ v=\frac{1}{4}x^4\end{cases}$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\int\frac{1}{4}x^4.\frac{1}{x}.dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3.dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+c$$

៦-អនុវត្តន៍អាំងតេក្រាលមិនកំនត់ :

ក. កំនត់រកអនុគមន៍ Total Cost **ដោយស្គាល់អនុគមន៍** Marginal Cost :

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ Marginal Cost កំនត់ដោយ $MC=MC(x)$ ។

អនុគមន៍ Total Cost កំនត់ដោយ $\boxed{TC(x)=\int MC(x).dx}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេមានអនុគមន៍ Marginal Cost កំនត់ដោយ $MC(x)=\frac{x}{2}+4$ គិតក្នុង១ខែ សម្រាប់ការផលិត ហើយចំណាយថេរស្មើនឹង 100 ឯកតារូបិយវត្ថុ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ចូររកអនុគមន៍ Total Cost សម្រាប់ខែនីមួយៗ ?

-តាង $TC(x)$ ជា អនុគមន៍ Total Cost

គេបាន $TC(x) = \int MC(x).dx = \int (\frac{x}{2} + 4).dx = \frac{x^2}{4} + 4x + k$

-ដោយចំណាយថេរស្មើ 100 មានន័យថា $TC(0) = 100$ នាំឱ្យ $K = 100$ ។

ដូចនេះ $\boxed{TC(x) = \frac{x^2}{4} + 4x + 100}$ ។

ខ. កំនត់អនុគមន៍ Total Profit **ដោយស្គាល់អនុគមន៍** Marginal Profit **:**

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ Marginal Profit កំនត់ដោយ $MP = MP(x)$ ។

អនុគមន៍ Total Profit កំនត់ដោយ $\boxed{TP(x) = \int MP(x).dx}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេមានអនុគមន៍ Marginal Profit កំនត់ដោយ $MP(x) = 30 - 2x$ ។

ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលបានលក់ ។ គេដឹងថាបើគេលក់ទំនិញ 15 ឯកតានោះ

គេនឹងបានប្រាក់ចំនេញ 25 ឯកតារូបិយវត្ថុ ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ Total Profit ?

គេបាន $TP(x) = \int MP(x).dx = \int (30 - 2x).dx = 30x - x^2 + k$

ដោយ $TP(15) = 25$ នាំឱ្យ $K = 200$ ។ ដូចនេះ $\boxed{TP(x) = -x^2 + 30x + 200}$ ។

គ.កំនត់រកអនុគមន៍ Total Revenue **ដោយស្គាល់អនុគមន៍** Marginal Revenue **:**

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ Marginal Revenue កំនត់ដោយ $MR = MR(x)$ ។

អនុគមន៍ Total Revenue កំនត់ដោយ $\boxed{TR(x) = \int MR(x).dx}$

ឧទាហរណ៍: គេមានអនុគមន៍ Marginal Revenue មួយកំនត់ដោយ :

$MR(x) = 8000 - 80x - 3x^2$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលបានលក់ ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ Total Revenue បើគេដឹងថា កាលណាគេលក់ផលិតផល 40 ឯកតា

គេទទួលបានប្រាក់ចំនូលសរុប 192 000 រៀល ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

SOLUTION: $TR(x) = 8000x - 40x^2 - x^3$ ។

គ.កំនត់រកអនុគមន៍ ផលិតផលសរុបដែលបានផលិតក្នុងរយះពេល t ដោយស្គាល់អនុគមន៍ ទិន្នផលពលកម្មនៅខណះ t :

បើគេស្គាល់ទិន្នផលពលកម្មមានអនុគមន៍ $W = W(t)$ នៅខណះ t នោះអនុគមន៍ផលិតផលសរុបដែលបានផលិតបានក្នុងរយះពេល t កំនត់ដោយ :

$$\boxed{TP(t) = \int W(t).dt}$$ ។

៧-អាំងតេក្រាលកំនត់ (Definite integrals)

ក-និយមន័យ : អាំងតេក្រាលកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ក្នុងចន្លោះ $[\,a, b\,]$ កំនត់ដោយ :

$$\boxed{\int_a^b f(x).dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}[f(\xi_k).\Delta x_k]}$$

ដែល $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, $\xi_k \in [x_k, x_{k-1}]$ ។

ខ-ទ្រឹស្តីបទ Newton – Leibniz

បើ $f(x)$ ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ និងមានព្រីមីទីវ $F(x)$ ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ នោះ អាំងតេក្រាលកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ កំនត់ដោយ :

$$\boxed{\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$ (ដែល $F'(x) = f(x)$) ។

គ-លក្ខណះនៃអាំងតេក្រាលកំនត់ :

1. $\int_a^a f(x) = 0$
2. $\int_a^b k\,f(x).dx = k\int_a^b f(x).dx$
3. $\int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)].dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x).dx - \int_a^b h(x).dx$
4. $\int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx = \int_a^b f(x).dx$
5. $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ឃ-រូបមន្តអាំងតេក្រាលកំនត់ប្តូរអថេរ :

1. បើគេមាន $I=\int_a^b f(x).dx$ បើគេតាង $x=\varphi(t)\Rightarrow dx=\varphi'(t).dt$

ចំពោះ $x\in[a,b]$ ត្រូវនឹង $t\in[t_1,t_2]$ គេបានរូបមន្ត :

$$\boxed{I=\int_a^b f(x).dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)].\varphi'(t).dt}$$

2. បើគេមាន $I=\int_a^b f[\phi(x)].\phi'(x).dx$ បើគេតាង $u=\phi(x)\Rightarrow du=\phi'(x).dx$

ចំពោះ $x\in[a,b]$ ត្រូវនឹង $u\in[\alpha,\beta]$ គេបានរូបមន្ត :

$$\boxed{I=\int_a^b f[\phi(x)].\phi'(x).dx=\int_\alpha^\beta f(u).du}$$

ង-រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក :

$$\boxed{\int_a^b u\,dv=[u\ v]_a^b-\int_a^b v\,du}$$

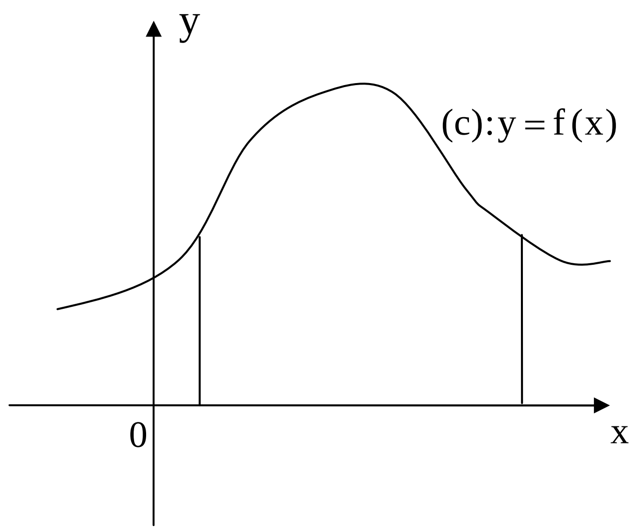
៧-អនុវត្តន៍អាំងតេក្រាលកំនត់

ក-តម្លៃមធ្យម : (Average Value)

តម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ កំនត់ដោយ :

$$\boxed{\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx}$$ ។

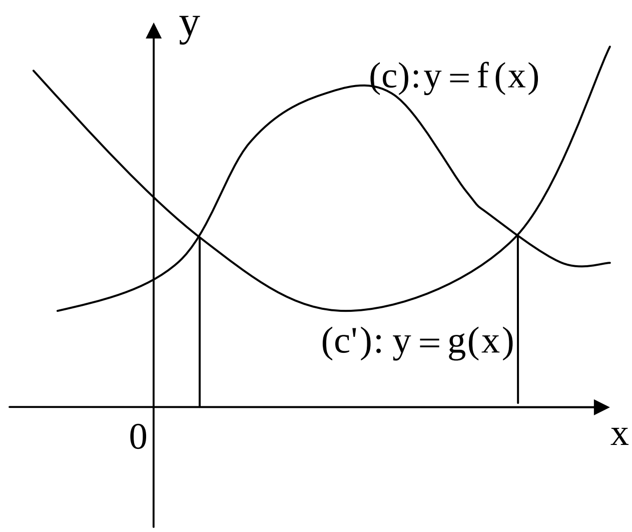
ខ-អត្ថន័យធរណីមាត្រ :



Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ និងអក្ស័អាប់ស៊ីស $(x'ox)$ ក្នុងចន្លោះ $[a\ ,b]$ កំនត់ដោយ : $\boxed{S = \int_a^b f(x).dx}$ ។

គ-ក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរក្នុងចន្លោះមួយ :



រូបមន្តសម្រាប់គណនា $\boxed{S = \int_a^b [f(x) - g(x)].dx}$ ។

ឃ-ចំណាយក្នុងការថែទាំគ្រឿងយន្ត :

បើគេប្រើរថយន្តកាន់តែយូរទៅនោះចំណាយក្នុងការថែទាំកាន់តែធំដែរ ។

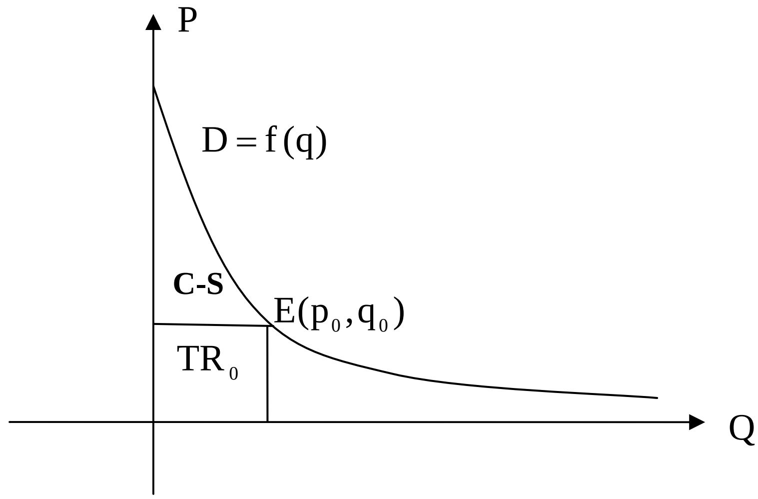
ឧបមាថា $r(t)$ ជាអនុគមន៍ចំនាយគ្រឿងយន្តមួយ នៅឆ្នាំទី t ដោយគិតធៀបពីពេលដែលគេទើបប្រើប្រាស់ (t គិតជាឆ្នាំ) ។

ចំណាយក្នុងការថែរទាំក្នុងចន្លោះរយះពេលពី t_1 ទៅ t_2 កំនត់ដោយ :

$\boxed{E = \int_{t_1}^{t_2} r(t).dt = [R(t)]_{t_1}^{t_2} = R(t_2) - R(t_1)}$ ដែល $R'(t) = r(t)$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ង-ភាពលើសរបស់អ្នកប្រើប្រាស់ :



សន្មតថា $D = f(q)$ ជអនុគមន៏រំរូវការ ហើយ $E(q_0, p_0)$ ជាចំនុចសមតា ។

ចំនូលសរុបត្រង់ចំនុចសមតា $TR_0 = p_0 \times q_0$ ដែល p_0 ជាថ្លៃសមតា ។

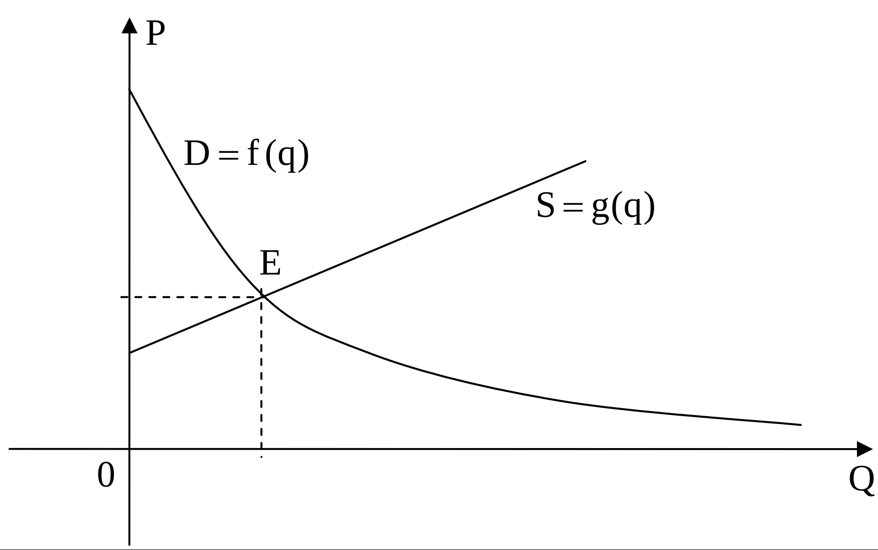
ភាពលើសរបស់អ្នកប្រើប្រាស់កំនត់ដោយ :

$$\boxed{\text{CONSUMER'S SURPLUS} = \int_0^{q_0} f(q).dq - q_0 \times p_0}$$ ។

ឧទាហរណ៏ : ឧបមាថាអនុគមន៏តម្រូវការ $f(q) = \frac{400}{(q+2)^2}$ និងថ្លៃសមតា \$25 ។

ចូររកភាពលើសនៃអ្នកប្រើប្រាស់ ?

ច-ភាពលើសរបស់អ្នកផលិត :



Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

សន្មតថា $S=g(q)$ ជាអនុគមន៍ផ្គត់ផ្គង់ ហើយ $E(q_0,p_0)$ ជាចំនុចសមតា ។

ចំនូលសរុបត្រង់ចំនុចសមតា $TR_0=p_0\times q_0$ ដែល p_0 ជាថ្លៃសមតា ។

ភាពលើសរបស់អ្នកផលិតកំនត់ដោយ ៖

$$\boxed{\text{PRODUCER'S SURPLUS}=q_0\times p_0-\int_0^{q_0} f(q).dq}$$ ។

ឧទាហរណ៏1 ៖ អនុគមន៍តម្រូវការរបស់ផលិតកម្មមួយគឺ $f(q)=\dfrac{200}{q+2}$ និងអនុគមន៍ផ្គត់ផ្គង់ $g(q)=q+12$ ។ ចូររកភាពលើសនៃអ្នកផលិត ?

ឧទាហរណ៏2: អនុគមន៍ផ្គត់ផ្គង់ផលិតផលមួយគឺ $g(q)=100+400\ln(q+4)$ ។

ចូររកភាពលើសនៃអ្នកផលិតត្រង់ $q=6$ units ?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ចំណាយសរុបមួយកំនត់ដោយ : $TC(x) = \frac{x^2}{3} - 4x + 2700$

តើគេត្រូវផលិតប៉ុន្មានឯកតាដើម្បីឱ្យចំនាយមធ្យមក្នុង 1ឯកតា អប្បបរមា ?

ដំណោះស្រាយ

តាង $\overline{TC}(x)$ ជាអនុគមន៍ចំណាយមធ្យម ។

គេបាន $\overline{TC}(x) = \frac{TC(x)}{x} = \frac{x}{3} - 4 + \frac{2700}{x}$

-គណនាដេរីវេទីមួយ $\overline{TC}'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2700}{x^2}$

-បើ $\overline{TC}' = 0$ នាំអោយ $\frac{1}{3} - \frac{2700}{x^2} = 0$ នាំអោយ $x = \sqrt{3 \times 2700} = 90$

-គណនាដេរីវេទីពីរ $\overline{TC}''(x) = \frac{5400}{x^3}$

ដោយគេមាន$\overline{TC}''(90) = \frac{5400}{90^3} > 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $TC(x)$ មានតម្លៃអប្បរមាត្រង់ $x = 90$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យចំណាយមធ្យមក្នុងមួយឯកតាអប្បបរមាគេត្រូវផលិតចំនួន 90 Units ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យ Total Revenue Function កំនត់ដោយ $TR(x) = \frac{880x - x^2}{x + 2}$

ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលគេត្រូវលក់ ។

តើគេត្រូវលក់ផលិតផលនេះប៉ុន្មានឯកតាដើម្បីឱ្យចំនួលសរុបអតិបរមា ?

ចូរកំនត់រកចំនួលអតិបរមានោះ ?

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេ:

$$TR'(x) = \frac{(880 - 2x)(x + 2) - (880x - x^2)}{(x + 2)^2} = \frac{1760 - 4x - x^2}{(x + 2)^2}$$

បើ $TR'(x)=0$ នាំឱ្យ $1760-4x-x^2=0$

$\Delta'=4+1760=1764=42^2$

គេទាញឫស $x_1=\frac{2-42}{-1}=40$, $x_2=\frac{2+42}{-1}=-44<0$ (មិនយក)

កន្សោម $TR'(x)$ មានសញ្ញាដូច $1760-4x-x^2$ ព្រោះ $(x+2)^2>0\ ,\ \forall x>0$ ។

x		-44		40	
$TR'(x)$					

ដោយត្រង់ចំនុច $x=40$ អនុគមន៏ $TR'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ នាំឱ្យអនុគមន៏ $TR(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ចំនុច $x=40$ ។

ដូចនេះគេត្រូវលក់ផលិតផល 40units ទើបទទួលបានប្រាក់ចំនូលអតិបរមា ។

ប្រាក់ចំនូលអតិបរមានោះគឺ $TR(40)=\frac{880(40)-(40)^2}{40+2}=800$ (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យអនុគមន៏ Marginal Revenue : $MR(x)=2000-40x-3x^2$

ដែល x ជាបរិមាណផលិតផល ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៏ Total Revenue បើគេដឹងថាបើគេលក់ផលិតផល 100units គេទទួលបានប្រាក់ចំនូលសរុប 17 000 (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $TR(x)$ ជាអនុគមន៏ Total Revenue ។

គេបាន $TR(x)=\int MR(x).dx=\int(2000-40x-3x^2).dx$

$$=2000x-20x^2-x^3+k$$

ដោយ $TR(10)=2000(10)-20(10)^2-(10)^3+k=17000$ នាំឱ្យ $k=0$

ដូចនេះ $TR(x)=200x-20x^2-x^3$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យអនុគមន៍ចំណាយក្នុងការថែទាំគ្រឿងយន្តមួយកំនត់ដោយ :

$r(t)=400-10t+3t^2$ ដែល t ជារយះពេលគិតជាឆ្នាំ និង 400ជាចំណាយថេរ ។

ចូររកចំណាយក្នុងការថែទាំពីឆ្នាំទី 4 ទៅឆ្នាំទី6 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង E ជាចំណាយក្នុងការថែទាំពីឆ្នាំទី 4 ទៅឆ្នាំទី6

គេបាន $E=\int_4^6 (400-10t+3t^2).dt=\left[400t-5t^2+t^3\right]_4^6=852$ (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

លំហាត់ទី៥

អនុគមន៍តម្រូវការរបស់ការផលិតមួយគឺ $f(q)=\dfrac{1000}{q+5}$ និងថ្លៃសមតាស្មើនឹង \$100 ។

ចូររកភាពលើសរបស់អ្នកប្រើប្រាស់ ?

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $p=\$100$ គេបាន $\dfrac{1000}{q+5}=100 \Rightarrow q=5\text{units}$

ដូចនេះ ($p=\$100 , q=5\text{units}$) ជាចំនុចសមតា ហើយចំនូលត្រង់ចំនុចសមតាគឺ :

$TR_0=100\times 5=\$500$ ។

គេបាន $C.S=\int_0^5 \dfrac{1000}{q+5}.dq-500=\left[1000\ln|q+5|\right]_0^5-500=1000\ln 2-500$

ដូចនេះភាពលើសនៃអ្នកប្រើប្រាស់គឺ $C.S=\$\,193$ ។

លំហាត់ទី៦

អនុគមន៍តម្រូវការរបស់ផលិតកម្មមួយគឺ $f(q)=\sqrt{100-q^2}$ និងអនុគមន៍ផ្គត់ផ្គង់

$g(q)=q+2$ ។

ចូររកភាពលើសនៃអ្នកផលិត ?

ដំណោះស្រាយ

-រកចំនុចសមតា :

$\sqrt{100-q^2}=q+2$

$100-q^2=q^2+4q+4$

$2q^2+4q-96=0$

$q^2+2q-48=0 \quad , \Delta'=1+48=49=7^2$

គេទាញឬស $q_1=-1+7=6$, $q_2=-1-7=-8<0$ (មិនយក)

គេបាន $q=6$ units នាំឱ្យ $p=6+2=\$8$

ភាពលើសនៃអ្នកផលិតគឺ $P.S=6\times 8-\int_0^6 (q+2).dq$

$$=48-\left[\frac{q^2}{2}+2q\right]_0^6=48-(18+12-0)=\$18$$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យ Marginal Profit Function មួយកំនត់ដោយ $MP(x)=\frac{10}{\sqrt{x+1}}-2$

ចូររក Total Profit Function បើគេដឹងថា បើគេលក់ 15 ឯកតាគេបានប្រាក់ចំនេញ\$50 ?

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $TP(x)=\int\left(\frac{10}{\sqrt{x+1}}-2\right).dx=20\sqrt{x+1}-2x+k$

ដោយ $TP(15)=20\sqrt{15+1}-2(15)+k=50\Rightarrow k=0$

ដូចនេះTotal Profit Function គឺ $TP(x)=20\sqrt{x+1}-2x$ ។

លំហាត់ទី៨

គណនាតម្លៃមធ្យមរបស់អនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ក្នុងចន្លោះ $[0,4]$ ។

គេបាន $\mu=\frac{1}{4-0}.\int_0^4\sqrt{2x+1}.dx=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{13}{6}=2.166$ ។

✍ ✍ ✍ ✍ ✍

លំហាត់អនុវត្តន៍

1- ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ចំណាយសរុបមួយកំនត់ដោយ :

$TC(x) = 2x^3 - 12x^2 + 27x + 250$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលត្រូវផលិត ។

ក. ចូរកំនត់រក Marginal cost function

ខ. ចូរកំនត់រក Marginal cost ត្រង់ចំនុច $x = 10$ units ។

2- ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលសរុបមួយកំនត់ដោយ :

$TR(x) = 60x - 0.05x^2$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលត្រូវលក់ ។

ក. ចូរគណនា $TR(600)$ រួចពន្យល់ពីលទ្ធផលនេះ ?

ខ. ចូរកំនត់រក Marginal Revenue Function

គ. ចូរកំនត់រក Marginal Revenue Function ត្រង់ $x = 100$ units ។

3-ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុបមួយកំនត់ដោយ :

$TP(x) = 50\sqrt{x^2 + 49} - \frac{x}{2} - 350$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលត្រូវលក់ ។

ក. ចូររក $TP(24)$ រួចពន្យល់ពីលទ្ធផលនេះ ។

ខ. ចូររក Marginal Profit Function.

គ. ចូររក Marginal Profit Function ត្រង់ចំនុច $x = 24$ units ។

4-ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលសរុប $TR(x) = 9000x + 5x^2 - \frac{1}{3}x^3$

ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលគេត្រូវលក់ ។

តើគេត្រូវលក់ផលិតផលនេះប៉ុន្មានឯកតាដើម្បីឱ្យបានចំនូលសរុបអតិបរមា ?

ចូរកំនត់ប្រាក់ចំនូលអតិបរមានោះ ?

5-ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលសរុប $TR(x) = 12000x$ និងអនុគមន៍

ប្រាក់ចំនាយសរុប $TC(x) = 6000 - 600x + 15x^2 + x^3$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផល ។

ចូរកំនត់បរិមាណផលិតផលដែលត្រូវលក់ដើម្បីឱ្យបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា ?

ចូរកំនត់រកប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះ ?

6-អនុគមន៍ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតមួយគឺ : $TC(x)=\frac{x^2}{4}-2x+400$ ។

តើគេត្រូវផលិតប៉ុន្មានឯកតាដើម្បីឱ្យចំណាយមធ្យមក្នុង1ឯកតាអប្បបរមា ?

ចូរចំណាយអប្បបរមានោះ ?

7-គេមាន Total Revenue Function កំនត់ដោយ $TR(x)=\frac{-x^2+884x-1764}{0.2x}$

ក. ចូររក Marginal Revenue Function

ខ. តើគេត្រូវលក់ផលិតផលប៉ុន្មានឯកតាដើម្បីឱ្យគេទទួលបានប្រាក់ចំនួលអតិបរមា ?

ចូររកប្រាក់ចំនូលអតិបរមានោះ ?

8-គេឱ្យអនុគមន៍ Marginal Revenue: $MR(x)=2000-40x-3x^2$ ។

ចូររក Total Revenue Function ?

9-គេឱ្យអនុគមន៍ Marginal Cost សម្រាប់ផលិតកម្មមួយកំនត់ដោយ :

$MC(x)=2+3x\ln(x+4)$ និងចំនាយថេរស្មើនឹង 8 000 000 រៀល ។

ចូរកំនត់រក Total cost function ?

10-គេឱ្យអនុគមន៍ Marginal Revenue: $MR(x)=8000-80x-3x^2$

និងអនុគមន៍ Marginal Cost : $MC(x)=2+(x+1)\ln(x+1)$ ហើយចំនាយថេរស្មើ

នឹង 500 000 រៀល ។

ចូររក Total profit function ?

11-អនុគមន៍Marginal Cost សម្រាប់ផលិតកម្មមួយគឺ $MC(x)=10+4(x-1)\ln x$

ហើយចំណាយថេរគឺ $1500 ។

ចូររកTotal cost function ?

12-គេមានអនុគមន៍តម្រូវការ $f(q)=\frac{10q+150}{q+5}$ និងថ្លៃសមតាស្មើនឹង $15 ។

ចូររកភាពលើសនៃអ្នកប្រើប្រាស់ ?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

13-អនុគមន៍តម្រូវការ $f(q)=\frac{750}{(q+3)^3}$ និងថ្លៃសមតាស្មើនឹង $6 ។

ចូររកភាពលើសនៃអ្នកប្រើប្រាស់ ?

14-ឧបមាថាអនុគមន៍ផ្គត់ផ្គង់ផលិតផល $g(q)=40+25.\ln(q+1)$ ។

ចូររកភាពលើសនៃអកផលិតត្រង់ $q=99$units ។

15-គេមានអនុគមន៍តម្រូវការផលិតកម្ម $f(q)=\sqrt{56-4q}$ និងអនុគមន៍ផ្គត់ផ្គង់

$g(q)=1+q$ ។ ចូររកភាពលើសនៃអ្នកផលិត ?

16-ឧបមាថាអនុគមន៍ចំនាយក្នុងការថែទាំគ្រឿងយន្តមួយកំនត់ដោយ :

$r(t)=100+2t+6t^2$ ដែល 100 ជាចំណាយថេរ និង t ជារយះពេលគិតជាឆ្នាំ។

ចូររកចំណាយក្នុងការថែទាំពីឆ្នាំទី2 ដល់ឆ្នាំទី4 ?

17- គេមានអនុគមន៍ចំនាយក្នុងការថែទាំគ្រឿងយន្តមួយកំនត់ដោយ :

$r(t)=150+2t+0.3t^2+0.4t^3$ ។

ដែល 150 ជាចំណាយថេរ និង t ជារយះពេលគិតជាឆ្នាំ។

ចូររកចំណាយក្នុងការថែទាំពីឆ្នាំទី3 ដល់ឆ្នាំទី5 ?

18-គេមានអនុគមន៍ចំនាយសរុបលើការផលិត q ឯកតានៃផលិតផលមួយប្រភេទ ដែល

កំនត់ដោយ $TC(q)=\frac{q^2}{2}+3q+800$ ។

ក-រកចំនាយមធ្យមក្នុងមួយឯកតា បើផលិតផល 100 units ។

ខ-រកចំណាយមធ្យមនៃ $TC(q)$ ក្នុងចន្លោះពី 0 ដល់ 100 ។

គ-កំនត់បរិមាណផលិតផលដែលត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យចំនាយមធ្យមក្នុងមួយឯកតាអប្បបរមា

អនុគមន៍មានពីរឬច្រើនអថេរ

(FUNCTION OF TWO OR MORE VARIABLES)

1 -សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ :

ក. អនុគមន៍មានពីរអថេរ :

ប្រសិនបើចំពោះគ្រប់ $(x,y)\in D$ មានរូបភាពមួយតាម f នោះ Z ហៅថាអនុគមន៍សេរី x , y ដែលគេកំនត់សរសេរ $Z=f(x,y)$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យ $Z=f(x,y)=2x^2-7xy+3y^2$ ជាអនុគមន៍មានពីរអថេរ ។

ឧទាហរណ៍ : កោនបរិវត្តន៍មួយដែលមានកពស់ h និងកាំថាសបាត R មានមាឌ $V=f(h,R)=\frac{\pi}{3}R^2h$ ជាអនុគមន៍មានពីរអថេរ ។

ឧទាហរណ៍ : អនុគមន៍មានពីរអថេរ $Z=f(x,y)=\frac{2006}{\sqrt[4]{a^2-x^2-y^2}}$, $a\neq 0$, a ថេរ

អនុគមន៍នេះអាចកំនត់បានកាលណា $a^2-x^2-y^2>0$ or $x^2+y^2<a^2$

តាមធរណីមាត្រ ដែនកំនត់ D នៃអនុគមន៍គឺជាផ្ទៃក្រឡារង្វង់ផ្ចិត O កាំ a ។

ឧទាហរណ៍ : ឧបមាថាអនុគមន៍ចំណាយថ្លៃដើមក្នុងការផលិតរបស់ក្រុមហ៊ុនមួយគឺ :

$TC(x,y)=2x+3y+4$ ។

ដែល x ជាថ្លៃវត្ថុធាតុដើម 1kg និង y ជាថ្លៃឈ្នួលពលកម្មក្នុង 1ម៉ោង គិតជាដុល្លា។

រកចំណាយថ្លៃដើមក្នុងការផលិត 1 unit បើវត្ថុធាតុដើមថ្លៃ 0.25$/kg និងថ្លៃឈ្នួលពលកម្មមាន $2.5/h ។

យើងបាន $TC(0.25\,;\,2.50)=2(0.25)+3(2.50)+4=\$12$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ក. អនុគមន៍មានពីរអថេរ :

ប្រសិនបើចំពោះគ្រប់ $(x,y,z)\in D$ មានរូបភាពមួយតាម f នោះ Z ហៅថាអនុគមន៍ស៊េរី

x , y,z ដែលគេកំនត់សរសេរ $Z=f(x,y,z)$ ។

ឧទាហរណ៍ : $Z=f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$ ជាអនុគមន៍មានបីអថេរ ។

អនុគមន៍នេះមានន័យបើ $1-x^2-y^2-z^2>0$ or $x^2+y^2+z^2<1$

តាមន័យធរណីមាត្រ ដែនកំនត់ D គឺជាមាឌស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត O កាំ $R=1$ ។

ឧទាហរណ៍ : អង្កត់ទ្រូងរបស់ប្រឡេពីប៉ែតកែងមួយដែលមានវិមាត្រ x, y,z ជាអនុគមន៍

មានបីអថេរដែលកំនត់ដោយ $d=f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

ប្រសិនបើវិមាត្រ $x=10cm$, $y=15cm$, $z=30cm$ គេបាន :

$d=f(10\,,15\,,30)=\sqrt{10^2+15^2+30^2}=35cm$ ។

2 -ដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ :

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍មានពីរអថេរមួយកំនត់ជាប់ក្នុងដែន D ដោយ $Z=f(x,y,z)$

-បើ y មិនប្រែប្រួលនោះ Z ក្លាយជាអនុគមន៍មានមួយអថេរ x ។

-បើ x មិនប្រែប្រួលនោះ Z ក្លាយជាអនុគមន៍មានមួយអថេរ y ។

ក. និយមន័យ :

ចំពោះ y មិនប្រែប្រួលនោះ Z ក្លាយជាអនុគមន៍មានមួយអថេរ x ហើយបើ Z មាន

ដេរីវេធៀបនឹង x នោះដេរីវេនេះគេហៅថាដេរីវេដោយផ្នែករបស់អនុគមន៍ $Z=f(x,y)$

ធៀបនឹង x ដែលគេកំនត់សរសេរ :

$$Z'_x=f'_x(x,y)=\frac{\partial Z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x\,,\,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

ដូចគ្នាដែរគេមាន : $Z'_y=f'_y(x,y)=\dfrac{\partial Z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,\,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យអនុគមន៍ $Z=f(x,y)=2x^2-7xy+3y^2$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ចូរគណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍នេះ ?

គេបាន $Z'_x = 4x - 7y$ និង $Z'_y = -7x + 6y$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេមានអនុគមន៍ $z = f(x,y) = x^y + y^x \quad , \; x > 0 \, , y > 0$

គេបាន $Z'_x = y x^{y-1} + y^x \ln y$ និង $Z'_y = x^y \ln x + xy^{x-1}$ ។

ឧទាហរណ៍:គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ : $Z = f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

គេបាន : $Z'_x = 3x^2 - 3yz \; , \; Z'_y = 3y^2 - 3xz \quad , \; Z'_z = 3z^2 - 3xyz$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេមានអនុគមន៍ $Z = f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

ចូរគណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍នេះ ?

គេបាន $Z'_x = \dfrac{(x^2 + y^2)'}{x^2 + y^2} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \quad , \; Z'_y = \dfrac{(x^2 + y^2)'}{x^2 + y^2} = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ $Z = f(x,y) = e^{x^3 + y^3}$

គេបាន $Z'_x = (x^3 + y^3)' e^{x^3 + y^3} = 3x^2 e^{x^3 + y^3} \; , \; Z'_y = (x^3 + y^3)' e^{x^3 + y^3} = 3y^2 e^{x^3 + y^3}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាដេរីវេតាមផ្នែកនៃអនុគមន៍ :

$Z = f(x,y,z) = x^y + y^z + z^x + x^x y^y z^z \qquad , x > 0, y > 0, z > 0$ ។

គេបាន $Z'_x = y x^{y-1} + z^x \ln z + x^x y^y z^z (1 + \ln x)$

$$Z'_y = x^y \ln x + zy^{z-1} + x^x y^y z^z (1 + \ln y)$$

$$Z'_z = y^z \ln y + xz^{x-1} + x^x y^y z^z (1 + \ln z)$$

ឧទាហរណ៍ : គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ :

$Z = f(x,y,z) = \ln(2x^3 + y^3 - 5z^3 + 4x^2 y^2 z^2)$

គេបាន $Z'_x = \dfrac{6x^2 + 8xy^2 z^2}{2x^3 + y^3 - 5z^2 + 4x^2 y^2 z^2}$

$$Z'_y = \frac{3y^2 + 8x^2 yz^2}{2x^3 + y^3 - 5z^3 + 4x^2 y^2 z^2}$$

$$Z'_z = \frac{-15z^2 + 8x^2 y^2 z}{2x^3 + y^3 - 5z^3 + 4x^2 y^2 z^2}$$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ឧទាហរណ៍ : គណនាដេរីវេដោយផ្នែកនៃអនុគមន៍ $Z = f(x,y,z) = x^{y^x}$?

៣-ភាពយឺត (ELASTICITY) :

ក. ចំពោះអនុគមន៍មានមួយអថេរ :

-កំណើន $\Delta x = x - x_0$ ហៅថាកំណើនដាច់ខាត ។

-ផលធៀប $\dfrac{\Delta x}{x_0}$ ហៅថាកំណើនធៀប ធៀបនឹង x ។

-ដើម្បីប្រៀបធៀបកំណើនធៀប ធៀបនឹង y គឺ $\dfrac{\Delta y}{y_0}$ ជាមួយនឹងកំណើនធៀប ធៀបនឹង x

គឺ $\dfrac{\Delta x}{x_0}$ យើងបង្កើតផលធៀប $E = \dfrac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \dfrac{x_0}{y_0} \times \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ។

ផលធៀបនេះមានន័យថា បើ x កើន 1% នោះ y កើនឬថយ $\left(\dfrac{x_0}{y_0} \cdot \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)\%$ ។

-មេគុណភាពយឺតនៃអនុគមន៍នៅត្រង់ ចំនុច x_0 គឺ $E = \dfrac{x_0}{y_0} . f'(x_0) = \dfrac{x_0}{y_0} . \dfrac{df(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}$ ។

ឧទាហរណ៍ : បើគេបង្កើនកម្មករ ពី 100នាក់ ទៅ 110នាក់ នោះផលិតផលនឹងកើនឡើង ពី 2000ឯកតា ទៅ 2200 ឯកតា ។

គេបាន $E = \dfrac{100}{2000} . \dfrac{2200-2000}{110-100} = 1\%$ មានន័យថា បើគេបង្កើនចំនួនកម្មករ 1% នោះ ផលិតផលនឹងកើនឡើង 1% ដែរ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យអនុគមន៍តម្រូវការ $f(q) = \sqrt{100 - q^2}$ ។

ចូររកភាពយឺតនៅត្រង់ចំនុច $q = 8$ units ។

គេមាន $f(q) = \sqrt{100 - q^2}$ នាំឱ្យ $\dfrac{df(q)}{dq} = -\dfrac{q}{\sqrt{100 - q^2}}$

បើ $q = 8 \Rightarrow p = f(8) = \sqrt{100 - 64} = 6$

ដូចនេះ ភាពយឺតនៅត្រង់ចំនុច $q = 8$ units គឺ $E = \dfrac{6}{8} . \left(-\dfrac{8}{\sqrt{100 - 8^2}}\right) = -1\%$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ខ. ភាពយឺតដោយផ្នែក :

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ពីរអថេរ $Z = f(x,y)$ ។ ភាពយឺតនៃអនុគមន៍នេះ ដូចគ្នាទៅនឹងភាពយឺតនៃអនុគមន៍មានមួយអថេរដែរ ។

-ភាពយឺត ធៀបនឹង x គឺ $\boxed{EZ_x = \frac{x}{f(x,y)} \times \frac{\partial Z}{\partial x}}$ ។

-ភាពយឺត ធៀបនឹង y គឺ $\boxed{EZ_y = \frac{y}{f(x,y)} \times \frac{\partial Z}{\partial y}}$ ។

៤-ចំណាយសរុប និង ចំណាយម៉ាជីណាល :

ឧបមាថាក្រុមហ៊ុនមួយផលិតទំនិញ ពីរ ប្រភេទដោយប្រើវត្ថុធាតុដើមខ្វចគ្នា តែមានសមាមាត្រខុសគ្នា ។

ដូចនេះអនុគមន៍ចំណាយសរុបគឺ : $TC(x,y) = Q(x,y)$

ដែល x និង y ជាបរិមាណផលិតផលនីមួយៗ ។

-Marginal Cost ធៀបនឹង x គឺ : $\frac{\partial TC}{\partial x} = Q'_x(x,y)$ ។

-Marginal Cost ធៀបនឹង y គឺ : $\frac{\partial TC}{\partial y} = Q'_y(x,y)$ ។

ឧទាហរណ៍ : អនុគមន៍ចំណាយផលិតផលពីរប្រភេទគឺ :

$TC(x,y) = 100 + \ln(x^2 + xy + y^2 + 1)$ ។

ចូររកMarginal Cost ធៀបនឹង x និងMarginal Cost ធៀបនឹង y ។

-Marginal Cost ធៀបនឹង x គឺ $\frac{\partial TC}{\partial x} = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2 + 1}$

-Marginal Cost ធៀបនឹង y គឺ $\frac{\partial TC}{\partial x} = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2 + 1}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យអនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលពីរកាលក់ផលិផលពីរប្រភេទ :

$TR(x) = 100\ln(2x^2 + 5y^2 + 1)$ ។

ចូររក Marginal Revenue ធៀបនឹង x រួច ធៀបនឹង y ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

៥-ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប :

ក. ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $Z = f(x,y)$, $\forall x,y \in D$ មានដេរីវេទីមួយ ។

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបត្រង់ចំនុច (x,y) កំនត់ដោយ : $\boxed{dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}.dx + \frac{\partial Z}{\partial y}.dy}$ ។

ឧទាហរណ៍ : រកឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍ $z = x^2 + 4xy + 3y^2$

គេបាន $dZ = (2x+4y).dx + (4x+6y).dy$ ។

ខ. ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $Z = f(x,y,z)$, $\forall x,y,z \in D$ មានដេរីវេទីមួយ ។

ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបត្រង់ចំនុច (x,y,z) កំនត់ដោយ : $\boxed{dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}.dx + \frac{\partial Z}{\partial y}.dy + \frac{\partial Z}{\partial z}.dz}$

ឧទាហរណ៍ : រកឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍ $Z = f(x,y,z) = \ln(2x^2 + 5y^2 + 4z^2)$

គេបាន $dZ = \frac{4x}{2x^2+5y^2+4z^2}.dx + \frac{10y}{2x^2+5y^2+4z^2}.dy + \frac{8z}{2x^2+5y^2+4z^2}$ ។

៦-ដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់ខ្ពស់ :

ដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់ពីររបស់អនុគមន៍ $Z = f(x,y)$ គឺជាដេរីវេដោយផ្នែករបស់ដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់មួយ ។ គេតាងដេរីវេលំដាប់ទីពីរដោយ :

1. $f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$
2. $f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$
3. $f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial y.\partial x}$
4. $f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x.\partial y}$

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យអនុគមន៍ $Z = f(x,y) = x^3 + y^3 - 2x^2y + 5xy^2 + 3$

ចូរគណនា f''_{xx} , f''_{yy} , f''_{xy} និង f''_{yx} ?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

៧ -បរមានៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរ :

ក. និយមន័យ :

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $Z=f(x,y)$

-គេថាអនគមន៍មានអតិបរិមាត្រង់ចំនុច $M(x_0,y_0)$ លុះត្រាតែគ្រប់ចំនុច $M(x,y)$

ក្នុងវីណាស៊ីណាៃនៃចំនុចM_0 គេបាន : $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ ។

- គេថាអនគមន៍មានអតិបរិមាត្រង់ចំនុច $M(x_0,y_0)$ លុះត្រាតែគ្រប់ចំនុច $M(x,y)$

ក្នុងវីណាស៊ីណាៃនៃចំនុចM_0 គេបាន :$f(x_0,y_0)<f(x,y)$ ។

ខ.របៀបកំនត់បរមានៃអនុគមន៍មានពីរថេរ :

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍$Z=f(x,y)$ដែលមានដេរីវេ ។

ដើម្បីកំណត់រកបរិមានៃអនុគមន៍គេត្រូវ:

១-គណនាដេរីវេដោយផ្នែកគឺ:$f'_x(x,y), f'_y(x,y)$

២-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ: $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$

ឧបមាថាប្រព័ន្ធមានគូចម្លើយ (x_0, y_0)

៣-គណនាបរិមាណ $a=f''_{xx}(x,y)$, $b=f''_{xy}(x,y)$, $c=f''_{yy}(x,y)$ត្រង់ (x_0,y_0)

៤-គណនាបរិមាណ $\Delta=ac-b^2$

☞ បើ $\Delta>0$, $a>0$ នោះអនុគមន៍ $Z=f(x_0,y_0)$ មានអប្បបរមា ។

☞ បើ $\Delta>0$, $a<0$ នោះអនុគមន៍ $Z=f(x_0,y_0)$ មានអតិបរមា ។

☞ បើ $\Delta<0$ នោះអនុគមន៍ $Z=f(x_0,y_0)$ គ្មានបរមា ។

☞ បើ $\Delta=0$ មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន ។

ឧទាហរណ៍: គេអោយអនុគមន៍$Z=f(x,y)=2x^2+5y^2-2xy-6x-6y+34$

រកបរិមានៃអនុគមន៍នេះ ។

-គណនាដេរីវេ $Z'_x=4x-2y-6$ and $Z'_y=10y-2x-6$

-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 4x-2y-6=0 \\ 10y-2x-6=0 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធមានគូចម្លើយ $x=2$, $y=1$

-គណនាបរិមាណ $\Delta = ac - b^2$

ដោយគេមាន $a = Z''_{xx} = 4$, $b = Z''_{xy} = -2$, $C = Z''_{yy} = 10$

គេបាន $\Delta = 40 - 4 = 36 > 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានអប្បបរមាត្រង់ $M_0(2,1)$

តម្លៃអប្បបរមានោះគឺ $Z_{min} = f(2,1) = 25$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុបពីការលក់ផលិតផលពីរប្រភេទកំនត់ដោយ :

$TP(x,y) = 1980 - 17x^2 - 10y^2 + 26xy - 10x + 10y$

ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលប្រភេទទីមួយ និង y ជាបរិមាណផលិតផលប្រភេទទីពីរ ។

តើគេត្រូវលក់ផលិតផលនីមួយៗប៉ុន្មានឯកតាដើម្បីឱ្យបានប្រាក់ចំនេញអតិបរមា ?

-គណនាដេរីវេ $TP'_x = -34x + 26y - 10$ and $TP'_y = -20y + 26x + 10$

-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} -34x + 26y - 10 = 0 \\ -20y + 26x + 10 = 0 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបានចម្លើយ $x = 15$, $y = 20$

-គណនា $\Delta = ac - b^2$ ដោយ $a = TP''_{xx} = -34$, $b = TP''_{xy} = 26$, $c = TP''_{yy} = -20$

គេបាន $\Delta = (-34)(-20) - (26)^2 = 4 > 0$ ។

ដោយ $a = -34 < 0$ នាំឱ្យ $TP(x,y)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = 15$, $y = 20$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យគេចំនេញអតិបរមាគេត្រូវលក់ផលិតផលទីមួយចំនួន 15units និងត្រូវលក់ផលិតផលទីពីរចំនួន 20 units ហើយប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះគឺ TP(15, 20) = \$2005 ។

គ-របៀបកំនត់រកបរមានៃអនុគមន៍មានបីអថេរ :

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $Z = f(x,y,z)$ ដែលមានដេរីវេ ។

ដើម្បីកំនត់រកបរមានៃអនុគមន៍នេះគេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

១.គណនាដេរីវេ : $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$, $f'_z(x,y,z)$

២.ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} f'_x(x,y,z)=0 \\ f'_y(x,y,z)=0 \\ f'_z(x,y,z)=0 \end{cases}$

៣. គណនាដេទែមីណង់ HESSE ត្រង់ចំនុចដែលជាចម្លើយនៃប្រពន្ធ័ខាងលើគឺ :

$$D_1 = f''_{xx}(x,y,z) = f''_{xx} \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

និង $D_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{yy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}$ ។

សន្និដ្ឋាន :

-បើ $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $Z = f(x,y,z)$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

- បើ $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ $Z = f(x,y,z)$ មានតម្លៃអតិបរមា ។

ឧទាហរណ៍ : រកតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ $Z = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 12z + 490$

-គណនាដេរីវេ $Z'_x = 2x - 4$, $Z'_y = 2y - 6$, $Z'_z = 2z - 12$

-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័ $\begin{cases} 2x-4=0 \\ 2y-6=0 \\ 2z-12=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=6 \end{cases}$

-គណនា $D_1 = Z''_{xx} = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} Z''_{xx} & Z''_{xy} \\ Z''_{yx} & Z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

និង $D_3 = \begin{vmatrix} Z''_{xx} & Z''_{xy} & Z''_{xz} \\ Z''_{yx} & Z''_{yy} & Z''_{yz} \\ Z''_{zx} & Z''_{zy} & Z''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$

ដោយ $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 4 > 0$, $D_3 = 8 > 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ចំនុច $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$ ហើយតម្លៃអប្បបរមានោះគឺ $Z(2,3,6) = 441$ ។

អនុវត្តន៍ : ចូររកតម្លៃបរមានៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

1. $Z = f(x,y,z) = 13x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xy - 12xz - 8y + 25$

2. $Z = f(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 4y - 6z + 2005$

3. $Z = f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz - 2yz - 2x - 2y + 2004$

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យអនុគមន៍ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតទំនិញបីប្រភេទកំនត់ដោយ :

$TC = f(x,y,z) = 4x^2 + 18y^2 + z^2 - 320x - 360y - 6yz + 50000$

ដែល x , y ,z ជាបរិមាណផលិតផលប្រភេទនីមួយៗ ។

តើគេត្រូវផលិតទំនិញប្រភេទនីមួយៗប៉ុន្មានដើម្បីឱ្យចំនាយអស់តិចបំផុត ?

ចូររកចំណាយអប្បបរមានោះ ?

-គណនាដេរីវេ $Z'_x = 8x - 320$, $Z'_y = 36y - 360 - 6z$, $Z'_z = 2z - 6y$

-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័ $\begin{cases} 8x - 320 = 0 \\ 36y - 6z - 360 = 0 \\ 2z - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \\ z = 60 \end{cases}$

-គណនា $D_1 = Z''_{xx} = 8$, $D_2 = \begin{vmatrix} Z''_{xx} & Z''_{xy} \\ Z''_{yx} & Z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 36 \end{vmatrix} = 288$

និង $D_3 = \begin{vmatrix} Z''_{xx} & Z''_{xy} & Z''_{xz} \\ Z''_{yx} & Z''_{yy} & Z''_{yz} \\ Z''_{zx} & Z''_{zy} & Z''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -6 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 576$

ដោយ $D_1 = 8 > 0$, $D_2 = 288 > 0$,$D_3 = 576 > 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមា ត្រង់ $x = 40, y = 20, z = 60$ ហើយប្រាក់ចំណាយអប្បបរមាក្នុងការផលិតនោះគឺ :

$$TC_{min} = 4(40)^2 + 18(20)^2 + (60)^2 - 320(40) - 360(20) - 6(20)(60) + 50000$$
$$= 6400 + 7200 + 3600 - 12800 - 7200 - 7200 + 50000 = \$40000$$

ឃ-របៀបកំនត់រកបរមានៃអនុគមន៍មានលក្ខខណ្ឌ :

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ ដែល x and y ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $g(x,y) = c$ ។

ដើម្បីរកបរមានៃអនុគមន៍នេះគេអាចដោះស្រាយបានតាមពីររបៀប :

1. របៀបទីមួយ :

គេត្រូវទាញ y ពីសមីការ $g(x,y) = c$ ឧបមាថា $y = \varphi(x,c)$ រួចយកទៅជួសក្នុងអនុគមន៍

គេបាន $Z = f[x, \varphi(x,c)]$ ជាអនុគមន៍មានមួយអថេរដែលគេអាចរកបានតាមរបៀបដែលយើងបានសិក្សារួចមកហើយ ។

2. របៀបទីពីរ :

ដោយប្រើមេគុណរបស់ **ឡាក្រង់** (Lagrange Multipliers)ដែអនុវត្តន៍ដូចតទៅ :

-បង្កើតអនុគមន៍ $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,[c - g(x,y)]$

-គណនាដេរីវេ $F'_x(x,y,\lambda)$, $F'_y(x,y,\lambda)$, $F'_\lambda(x,y,\lambda)$

-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$

-គណនាដែទែរមីណង់ HESSE: $D = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ g'_y & F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}$

សន្និដ្ឋាន : -បើ $D > 0$ នោះអនុគមន៍មានអតិបរមា។

-បើ $D < 0$ នោះអនុគមន៍មានអប្បបរមា។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យអនុគមន៍ចំនូលសរុបពីការលក់ផលិតផលពីរប្រភេទកំនត់ដោយ :

$TR(x,y) = 8000x - x^2y$ ដែល $x \& y$ ជាបរិមាណផលផលប្រភេទនីមួយៗ

ហើយគេដឹងថា $x - y + 40 = 0$ តើគេលក់ផលិតផលប្រភេទនីមួយប៉ុន្មានដើម្បីឱ្យគេបានប្រាក់ចំនួលអតិបរមា ?រកប្រាក់ចំនួលនោះ ?

គេមាន $TR(x,y) = 8000x - x^2y$ ដោយ $x - y + 40 = 0$ នោះ $y = 40 + x$

គេបាន $TR(x) = 8000x - x^2(40 + x) = 8000x - 40x^2 - x^3$

-រកដេរីវេទីមួយ $TR'(x) = 8000 - 80x - 3x^2$

-ដោះស្រាយសមីការ $TR'(x) = 8000 - 80x - 3x^2 = 0$ $\Delta' = 1600 + 2400 = 160^2$

គេទាញឬស $x_1 = \dfrac{40 - 160}{-3} = 40$, $x_2 = \dfrac{40 + 160}{-3} = -\dfrac{200}{3} < 0$ (មិនយក)

-គណនាដេរីវេទីពីរ $TR''(x) = -80 - 6x$ នាំឱ្យ $TR''(40) = -80 - 6(40) = -320 < 0$

មានន័យថាអនុគមន៍នេះមានតម្លៃអប្បរមាត្រង់ $x = 40$ ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យគេទទួលបានប្រាក់ចំនួលអតិបរមាគេត្រូវលក់ផលិតផលប្រភេទទីមួយ ចំនួន 40 units និង ផលិតផលប្រភេទទីពីរចំនួន 80 units ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុបពីកាលក់ផលិតផលពីរប្រភេទកំនត់ដោយ :

$TP = f(x,y) = -200 + xy$ ដែល $x \,\&\, y$ ជាបរិមាណផលផលប្រភេទនីមួយៗ

ហើយគេដឹងថា $x + y = 30$ តើគេលក់ផលិតផលប្រភេទនីមួយប៉ុន្មានដើម្បីឱ្យគេបាន ប្រាក់ចំនេញអតិបរមា ? រកប្រាក់ចំនេញនោះ ?

-បង្កើតអនុគមន៍ $F(x,y,\lambda) = (-200 + xy) + \lambda(30 - x - y)$

-គណនាដេរីវេ $F'_x = y - \lambda$, $F'_y = x - \lambda$, $F'_\lambda = 30 - x - y$

-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} y - \lambda = 0 \\ x - \lambda = 0 \\ 30 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \lambda = 15$

-គណនាដេទែមីណង់ HESSE: $D = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ g'_y & F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$

មានន័យថាដើម្បីឱ្យគេបានប្រាក់ចំនេញអតិបរមា គេត្រូវលក់ផលិតផលទីមួយចំនួន 15 units និងផលិតផលទីពីរចំនួន 15 units ហើយប្រាក់ចំនេញនោះគឺ $TP_{max} = \$25$ ។

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេមានអនុគមន៍ចំណាយសរុបនៃការផលិត ផលិតផលពីរប្រភេទ A និង B កំនត់ដោយ :

$TC = f(x,y) = 17x^2 + 10y^2 - 26xy + 10x - 10y + 65$

ដែល $x \& y$ ជាបរិមាណផលផលប្រភេទនីមួយៗ ។

ក-គណនាចំណាយម៉ាជីណលធៀបនឹង x ។

ខ-គណនាចំណាយម៉ាជីណលធៀបនឹង y ។

គ-តើគេត្រូវផលិតនូវផលិតផលនីមួយៗប៉ុន្មានដើម្បីឱ្យចំណាយអស់តិចបំផុត ?

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាចំណាយម៉ាជីណលធៀបនឹង x

គេបាន $TC'_x = \dfrac{\partial TC}{\partial x} = 34x - 26y + 10$

ខ-គណនាចំណាយម៉ាជីណលធៀបនឹង y

គេបាន $TC'_y = \dfrac{\partial TC}{\partial y} = 20y - 26x - 10$

គ-រកបរិមាណផលិតផលដែលត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យចំណាយអស់តិចបំផុត :

គេមាន $TC'_x = 34x - 26y + 10$, $TC'_y = 20y - 26x - 10$

-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 34x - 26y + 10 = 0 \\ 20y - 26x - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 15 , y = 20$

-គណនា $\Delta = ac - b^2$ ដោយ $a = TC''_{xx} = 34 , b = TC''_{xy} = -26 , TC''_{yy} = 20$

គេបាន $\Delta = 680 - 676 = 4 > 0$, $a = 34 > 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមា ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យចំណាយអស់តិចបំផុតគេត្រូវផលិត ផលិតផលប្រភេទទីមួយចំនួន 15 និងផលិតផលទីពីរចំនួន 20 ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់ទី២

ឧបមាថា $TC(x,y)$ ជាអនុគមន៍ចំណាយសរុបនៃការផលិតនូវផលិតផលពីរប្រភេទ ។
គេដឹងថា Marginal cost ធៀបនឹង x គឺ $\frac{\partial TC}{\partial x}=2x+8y$ និង Marginal cost ធៀបនឹង y គឺ $\frac{\partial TC}{\partial y}=8x+2y$ ហើយចំណាយថេរស្មើនឹង \$50 ។
ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ចំណាយសរុប $TC=TC(x,y)$?

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ចំណាយសរុប $TC=TC(x,y)$

គេមាន $\frac{\partial TC}{\partial x}=2x+8y$

គេបាន $TC=\int(2x+8y).dx=x^2+8xy+K(y)$ នាំឱ្យ $TC'_y=8x+k'(y)$

ដោយ $\frac{\partial TC}{\partial y}=TC'_y=8x+2y$ គេទាញបាន $8x+k'(y)=8x+2y$

នាំឱ្យ $k'(y)=2y$ នាំឱ្យ $k(y)=\int 2y.dy=y^2+c$

គេបាន $TC=TC(x,y)=x^2+8xy+y^2+c$ ចំណាយថេរស្មើនឹង \$50 នោះ $c=\$50$

ដូចនេះ $TC(x,y)=x^2+8xy+y^2+50$ ។

លំហាត់ទី៣

ឧបមាថា $TC=TC(x,y)$ ជាអនុគមន៍ចំណាយសរុបនៃការផលិតនូវផលិតផលពីរប្រភេទ ដែល $x\&y$ ជាបរិមាណផលផលប្រភេទនីមួយៗ ។

គេដឹងថាឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុគមន៍ចំណាយសរុបនេះកំនត់ដោយ :

$dTC=(4x-4y-6).dx+(-4x+8y-6)$ ហើយចំណាយថេរស្មើនឹង \$100 ។

ក-ចូររកMarginal cost ធៀបនឹង x និងMarginal cost ធៀបនឹង y ។

ខ-ចូរកំនត់ រកអនុគមន៍ចំណាយសរុប $TC=TC(x,y)$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ដំណោះស្រាយ

ក-រកMarginal cost ធៀបនឹង x និងMarginal cost ធៀបនឹង y

តាមទំនាក់ទំនង $dTC = (4x - 4y - 6).dx + (-4x + 8y - 6)$

គេទាញបាន $TC'_x = \dfrac{\partial TC}{\partial x} = 4x - 4y - 6$ ជាMarginal cost ធៀបនឹង x

និង $TC'_y = \dfrac{\partial TC}{\partial y} = -4x + 8y - 6$ ជាMarginal cost ធៀបនឹង y ។

ខ-កំនត់ រកអនុគមន៍ចំណាយសរុប $TC = TC(x, y)$

ដោយ $\dfrac{\partial TC}{\partial x} = 4x - 4y - 6 \Rightarrow TC = \int (4x - 4y - 6).dx = 2x^2 - 4xy - 6x + k(y)$

គេបាន $TC'_y = -4x + k'(y)$ ដោយ $TC'_y = \dfrac{\partial TC}{\partial y} = -4x + 8y - 6$

គេទាញ $-4x + k'(y) = -4x + 8y - 6$

$$k'(y) = 8y - 6 \Rightarrow k(y) = \int (8y - 6).dy = 4y^2 - 6y + c$$

គេទាញ $TC = TC(x, y) = 2x^2 - 4xy - 6x + 4y^2 - 6y + c$

ដោយ ចំណាយថេរស្មើនឹង \$100 នាំឱ្យ $c = \$100$ ។

ដូចនេះ $TC(x, y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 6y + 100$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញពីការលក់ផលិតផលពីរប្រភេទកំនត់ដោយ :

$TP = f(x, y) = -5x^2 - y^2 + 4xy + 280x + 100y$

ដែល $x \& y$ ជាបរិមាណផលផលប្រភេទនីមួយៗ ។

ក-Find Maginal Profit ធៀបនឹង x ត្រង់ចំនុច $(20, 25)$ ។

ខ- Find Maginal Profit ធៀបនឹង y ត្រង់ចំនុច $(20, 25)$ ។

គ-កំនត់បរិមាណផលិតផលប្រភេទនីមួយៗដើម្បីឱ្យគេទទួលបានប្រាក់ចំនេញអតិបរមា?

ចូររកប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះ ?

ដំណោះស្រាយ

ក- Maginal Profit ធៀបនឹង x ត្រង់ចំនុច $(25, 30)$

គេបាន $TC'_x = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f'_x(x,y) = -10x + 4y + 280$

ត្រង់ចំនុច $(25, 30)$ គេបាន $TC'_x = f'_x(25,30) = -10(25) + 4(30) + 280 = 150$

ខ- Maginal Profit ធៀបនឹង y ត្រង់ចំនុច $(25, 30)$

គេបាន $TC'_y = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y) = -2y + 4x + 100$

ត្រង់ចំនុច $(25, 30)$ គេបាន $TC'_y = f'_y(25,30) = -2(30) + 4(25) - 100 = -60$

គ-កំនត់បរិមាណផលិតផលប្រភេទនីមួយៗ:

គេមាន $TC'_x = -10x + 4y + 280$, $TC'_y = -2y + 4x - 100$

-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័ $\begin{cases} -10x + 4y + 280 = 0 \\ -2y + 4x - 100 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 40 , y = 30$

-គណនា $\Delta = ac - b^2$ ដោយ $a = TC''_{xx} = -10, b = TC''_{xy} = 4$, $c = TC''_{yy} = -2$

គេបាន $\Delta = 20 - 16 = 4 > 0$, $a = -10 < 0$ នាំឱ្យអនុគមន៏មានអតិបរមា ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យគេទទួលបានប្រាក់ចំនេញអតិបរមាលុះត្រាតែគេលក់ផលិតផលប្រភេទទី១ ចំនួន 40units និង ប្រភេទទី២ចំនួន 30units ។

លំហាត់ទី៥

អនុគមន៏តម្រូវការនៃផលិតផលពីរប្រភេទ X and Y កំនត់រៀងគ្នាដោយ :

$p_1 = 60 - x$ and $p_2 = 80 - 2y$ ហើយអនុគមន៏ចំណាយសរុបផលិតផលទាំងពីរគឺ :

$TC(x,y) = 20 + 2xy$ ដែល $x \& y$ ជាបរិមាណផលផលប្រភេទនីមួយៗ ។

កំនត់បរិមាណផលិតផលប្រភេទនីមួយៗដើម្បីឱ្យគេទទួលបានប្រាក់ចំនេញអតិបរមា?

ចូររកប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះ ?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ដំណោះស្រាយ

តាង $TP(x,y)$ ជា Total Profit Function

គេបាន $TP = TP(x,y) = TR(x,y) - TC(x,y)$

$$= p_1x + p_2y - TC(x,y)$$
$$= (60-x)x + (80-2y)y - (20+2xy)$$
$$= 60x - x^2 + 80y - 2y^2 - 20 - 2xy$$
$$= -x^2 - 2y^2 - 2xy + 60x + 80y - 20$$

-គណនាដេរីវេ $TP'_x = -2x - 2y + 60$, $TC'_y = -4y - 2x + 80$

-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} -2x - 2y + 60 = 0 \\ -2x - 4y + 80 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 20 \;\; , \; y = 10$

-គណនា $\Delta = ac - b^2$ ដោយ $a = TP''_{xx} = -2, b = TC''_{xy} = -2$, $c = TC''_{yy} = -4$

គេបាន $\Delta = 8 - 4 = 4 > 0$, $a = -2 < 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានអប្បបរមា ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យគេទទួលបានប្រាក់ចំនេញអតិបរមាលុះត្រាតែគេលក់ផលិតផលប្រភេទទី១ ចំនួន 20units និង ប្រភេទទី២ចំនួន 10units ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. អនុគមន៍ចំណាយនៃការផលិតនូវផលិតផលពីរប្រភេទ A and B កំនត់ដោយ :

$TC = f(x,y) = x^2 + y^2 - 4000x - 6000y + 15000000$ ។

ដែល $x \& y$ ជាបរិមាណផលផលប្រភេទនីមួយៗ ។

ចូរកំនត់បរិមាណផលិតផលដែលត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយអប្បបរមា ?

កំនត់រកប្រាក់ចំណាយសរុបអប្បបរមានោះ ?

2. អនុគមន៍ចំណាយនៃការផលិតនូវផលិតផលបីប្រភេទ A , B and C កំនត់ដោយ :

$TC = f(x,y,z) = 4x^2 + 18y^2 + z^2 - 320x - 360y - 6yz + 60000$

ដែល x , y and z ជាបរិមាណនៃផលិតផលប្រភេទនីមួយៗ ។

ចូរកំនត់បរិមាណផលិតផលដែលត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយអប្បបរមា ?

កំនត់រកប្រាក់ចំណាយសរុបអប្បបរមានោះ ?

3. អនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញពីកាលក់នូវផលិតផលបីប្រភេទ A , B and C កំនត់ដោយ :

$TP = f(x,y,z) = -5x^2 - 4y^2 - z^2 + 4xz + 80x + 160y$

ដែល x , y and z ជាបរិមាណនៃផលិតផលប្រភេទនីមួយៗ ។

កំនត់បរិមាណផលិតផលប្រភេទនីមួយៗដើម្បីឱ្យគេទទួលបានប្រាក់ចំនេញអតិបរមា?

ចូររកប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះ ?

4. អនុគមន៍តម្រូវការនៃផលិតផលបីប្រភេទ A , B , C កំនត់រៀងគ្នាដោយ :

$p_1 = 50 - x$, $p_2 = 40 - y$ and $p_3 = 80 - z$

ហើយអនុគមន៍ចំណាយសរុបផលិតផលទាំងពីរគឺ $TC(x,y) = 20 + 2x + 4y + 6z$

ដែល x , $y \& z$ ជាបរិមាណផលផលប្រភេទនីមួយៗ ។

កំនត់បរិមាណផលិតផលប្រភេទនីមួយៗដើម្បីឱ្យគេទទួលបានប្រាក់ចំនេញអតិបរមា?

ចូររកប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះ ?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

5. ឧបមាថា $TC = f(x, y)$ ជាអនុគមន៍ចំណាយសរុបរបស់ផលិតផលពីរប្រភេទ ។ ដែល $x \& y$ ជាបរិមាណផលផលប្រភេទនីមួយៗ ហើយចំណាយថេរស្មើ \$60 ។

គេដឹងថា Maginal Cost ធៀបនឹង x គឺ $\dfrac{\partial TC}{\partial x} = 10x - 6y + 40$

Maginal Cost ធៀបនឹង y គឺ $\dfrac{\partial TC}{\partial y} = -6x + 4y - 40$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ចំណាយសរុបនេះ ? រួចរកប្រាក់ចំណាយអប្បបរមានៃការផលិត ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ការប្រាក់ទោល និង ការប្រាក់ផ្ទួន

១_សញ្ញាណ និង ប្រភេទការប្រាក់

ក.ការប្រាក់ (Interest)

ការប្រាក់គឺជាប្រាក់ដែលអ្នកប្រើទុន ត្រូវបង់ទៅឱ្យម្ចាស់ទុន ដើម្បីប្រើប្រាស់ទុននេះក្នុងរយៈពេលមួយកំនត់ ពោលគឺជាប្រាក់ចំណេញដែលបានមកពីតឹកប្រាក់ដែលដាក់ឱ្យខ្ចីក្នុងរយៈពេលមួយកំនត់ ។

ខ.អត្រាការប្រាក់ (Interest rate)

ផលធៀបរវាងការប្រាក់ដែលបានបង់ក្នុងមួយឆ្នាំ ជាមួយនឹងទុនដែលបានខ្ចីហៅថា **អត្រាការប្រាក់** ។

អត្រាការប្រាក់គិតជាភាគរយ ឬ ទសភាគ ។

ឧទាហរណ៍ : អត្រាការប្រាក់ $i = 9\% = 0,09$ ។

គ.ប្រភេទនៃការប្រាក់

ការប្រាក់មានពីរប្រភេទគឺ :

ការប្រាក់ទោល (Simple interest) និង ការប្រាក់សមាស (Compound Interest) ។

២_ការប្រាក់ទោល (Simple Interest)

ក.និយមន័យ :

ការប្រាក់ទោលគឺជាការប្រាក់ដែលគិតលើប្រាក់ដើមដែលបានខ្ចី ក្នុងគ្រប់រយៈពេល ។ ការប្រាក់របស់រយៈពេលនីមួយៗ មិនបានបូកបញ្ចូលជាមួយប្រាក់ដើម ដើម្បីយកការប្រាក់នៅគ្រាក្រោយៗទៀតឡើយ ។

ខ.រូបមន្តគណនាការប្រាក់ទោល:

បើគេយកសាច់ប្រាក់ចំនួន PV (ប្រាក់ដើម) ទៅធ្វើវិនិយោគក្នុងរយៈពេល n ខួប ឬ គ្រា ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ i នោះការប្រាក់ដែលទទួលបានអាចគណនាតាមរូបមន្តគ្រឹះ :

$\boxed{I_n = PV \times n \times i}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : លោកសារី បានយកប្រាក់ដើមចំនួន \$75,000 ទៅធ្វើវិនិយោគក្នុងរយៈពេល 3ឆ្នាំដោយទទួលបានការប្រាក់ 20% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។

គណនាការប្រាក់ដែលលោកសារីទទួលបាន ?

តាមរូបមន្ត $I_n = PV.n.i$ ដោយ $\begin{cases} PV = \$75{,}000 \\ n = 3 \\ i = 20\% = 0.2 \end{cases}$

គេបាន $I_3 = 75{,}000 \times 3 \times 0.2 = \$45{,}000$ ។

ឧទាហរណ៍ ២ : លោក សារ៉ាតបានយកប្រាក់ដើមចំនួន 450,000,000 រៀល ទៅធ្វើវិនិយោគដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ $i = 25\%$ ក្នុងមួយឆ្នាំ ។

ចូរគណនាការប្រាក់ដែលលោកសារ៉ាតទទួលបានក្នុងរយៈពេល :

ក. 75 ថ្ងៃ ។

ខ. 5 ខែ ។

គ. 2 ឆ្នាំ 7 ខែ ។ (សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង) ។

គ.រូបមន្តគណនាថ្លៃអនាគត (Future Value)

បើគេយកប្រាក់ដើមចំនួន PV ទៅធ្វើវិនិយោគដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ i ក្នុងរយៈពេល n ឆ្នាំ នោះនៅចុងឆ្នាំទី n ប្រាក់ដែលគេទទួលបាន ឬថ្លៃអនាគតអាចគណនាតាមរូបមន្ត : $\boxed{FV = PV + I_n = PV(1 + n.i)}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : លោក សុគន្ធ បានយកប្រាក់ទៅវិនិយោគចំនួន 240,000,000 រៀល ក្នុងរយៈពេល 2 ឆ្នាំ 5 ខែ ជាមួយនឹងអត្រាការប្រាក់ ប្រចាំឆ្នាំ $i = 12\%$ ។ ចូរគណនាថ្លៃអនាគតតាមការប្រាក់ទោល ?

តាមរូបមន្ត $FV = PV(1 + n.i)$

ដោយ $n = 2$ ឆ្នាំ 5 ខែ $= (2 + \frac{5}{12})$ ឆ្នាំ (ព្រោះ 5ខែ=$\frac{5}{12}$ ឆ្នាំ) ។

គេបាន $PV = 240{,}000{,}000\left[1 + (2 + \frac{5}{12}) \times 12\%\right] = ...$

ឧទាហរណ៍២ : លោក សុផល បានខ្ចីប្រាក់គេចំនួន 400 000 000 រៀល ក្នុងរយៈពេល 2 ឆ្នាំជាមួយអត្រាការប្រាក់ប្រចាំខែ $i = 2\%$ ។ ចូរគណនាថ្លៃអនាគតតាមការប្រាក់ទោល

(សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង) ។

៣. ការប្រាក់ផ្គួប (Compound Interest)

ក. និយមន័យ :

ការប្រាក់ផ្គួប គឺជាប្រភេទការប្រាក់ដែលប្រើក្នុងភារកិច្ចហិរញ្ញវត្ថុរយៈពេលវែង ។ ការប្រាក់ផ្គួបមានន័យថាការប្រាក់របស់គ្រាមុនត្រូវបន្ថែមជាមួយប្រាក់ដើមដែលបានយកធ្វើវិនិយោគដើម្បីយកការប្រាក់នៅគ្រាបន្ទាប់ ។ ក្នុងការប្រាក់ផ្គួប ការប្រាក់បង្កើតការប្រាក់

ខ. រូបមន្តគណនាថ្លៃអនាគតតាមការប្រាក់ផ្គួប

បើគេយកប្រាក់ដើម PV ទៅធ្វើវិនិយោគដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ i តាមការប្រាក់ផ្គួបក្នុងរយៈពេល n ឆ្នាំ នោះនៅចុងឆ្នាំទី n ប្រាក់ដែលគេទទួលបាន ឬថ្លៃអនាគតអាចគណនាបានតាមរូបមន្ត : $\boxed{FV = PV.(1 + i)^n}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : លោកសារីបានយកប្រាក់ដើមចំនួន 75,000,000 រៀល ទៅធ្វើវិនិយោគក្នុងរយៈពេល4 ឆ្នាំ តាមការប្រាក់ផ្គួបជាមួយអត្រាការប្រាក់ 8% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ គណនាថ្លៃអនាគត ?

តាមរូបមន្ត $FV = PV(1+i)^n$ ដោយ $\begin{cases} PV = 75,000,000 \\ n = 4 \\ i = 8\% = 0.08 \end{cases}$

គេបាន $FV = 750,000,000(1+0.08)^4 = ...$

ឧទាហរណ៍ ២ : លោក សារ៉ាតបានយកប្រាក់ចំនួន \$250,000 ទៅផ្ញើក្នុងធនាគារមួយក្នុងរយះពេល4ឆ្នាំ ១ខែ ជាមួយអត្រាការប្រាក់ $i = 5\%$ ក្នុងមួយ ។

គណនាថ្លៃអនាគត់តាមការប្រាក់ផ្គួប ?

(សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង) ។

ឧទាហរណ៍ ៣ : គេយកប្រាក់ដើមចំនួន \$450,000 ទៅធ្វើវិនិយោគក្នុងរយះពេល 4 ឆ្នាំ 3 ខែ ។

គេដឹងថាអត្រាការប្រចាំឆ្នាំគឺ $i = 12\%$ ។

ក-ចូគណនាថ្លៃអនាគតតាមការប្រាក់ទោល ។

ខ-ចូរគណនាថ្លៃអនាគតតាមការប្រាក់ផ្គួប ។

(សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង) ។

គ -រូបមន្តគណនាថ្លៃបច្ចុប្បន្ន

តាមរូបមន្ត $FV = PV(1+i)^n$ គេទាញបាន $PV = \dfrac{FV}{(1+i)^n} = FV.(1+i)^{-n}$

ដូចនេះ $\boxed{PV = FV(1+i)^{-n}}$ ។

ឧទាហរណ៍ ១ : គេបានយកប្រាក់ដើម PV ទៅផ្ញើក្នុងធនាគារមួយក្នុងរយះពេល 3 ឆ្នាំតាមការប្រាក់ផ្គួប ជាមួយអត្រាការប្រាក់ 9% ។

គេដឹងថាថ្លៃអនាគតមាន 12 950 290 រៀល ។

ចូរគណនាលៃបច្ចុប្បន្ន PV ?

ចម្លើយ $PV = 10,000,000$ រៀល ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ឃ -រូបមន្តគណនារយះពេលវិនិយោគតាមការប្រាក់ផ្ទួប

តាមរូបមន្ត $FV = PV.(1+i)^n$ គេទាញបាន :

$$(1+i)^n = \frac{FV}{PV}$$

$$\ln(1+i)^n = \ln\left(\frac{FV}{PV}\right)$$

$$n.\ln(1+i) = \ln FV - \ln PV$$

ដូចនេះ $\boxed{n = \dfrac{\ln FV - \ln PV}{\ln(1+i)}}$ ។

ឧទាហរណ៍ :គេយកប្រាក់ដើម $PV = \$15,000,000$ ទៅធ្វើវិនិយោគតាមអត្រាការប្រាក់ផ្ទួបប្រចាំឆ្នាំ $i = 12\%$ ។

គណនារយះពេលវិនិយោគដើម្បីឱ្យថ្លៃអនាគតស្មើ $FV = \$23,602,790$

តាមរូបមន្ត $n = \dfrac{\ln FV - \ln PV}{\ln(1+i)}$ ដោយ $\begin{cases} FV = \$23,602,790 \\ PV = \$15,000,000 \\ i = 12\% = 0.12 \end{cases}$

ដូចនេះ $n = \dfrac{\ln 23602790 - \ln 15000000}{\ln(1+0.12)} \approx 4$ ឆ្នាំ ។

ង -រូបមន្តគណនាអត្រាការប្រាក់តាមការប្រាក់ផ្ទួប

តាមរូបមន្ត $FV = PV(1+i)^n$ គេទាញបាន :

$$(1+i)^n = \frac{FV}{PV}$$

$$1+i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}}$$

ដូចនេះ $\boxed{i = \sqrt[n]{\dfrac{FV}{PV}} - 1}$ ។

៤_ការប្រាក់ផ្ទួបបន្តបន្ទាប់

ប្រសិនបើគេអនុវត្តន៍ អត្រាការប្រាក់ផ្ទួបជាច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ (សន្មតថា m ដងក្នុង១ឆ្នាំ) ក្នុងករណីនេះ អត្រាការប្រាក់ក្នុងមួយលើក១គឺ $\dfrac{i}{m}$ ។

ដូចនេះតម្លៃអនាគតកំនត់ដោយ $FV = PV.\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$ ។

កាលណា $m \to +\infty$ គេបាន $FV = \lim_{m\to+\infty}\left[PV\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}\right]$

បើយើងតាង $\frac{i}{m} = \frac{1}{x}$ ឬ $x = \frac{m}{i}$ កាលណា $m \to +\infty$ នោះ $x \to +\infty$

គេបាន $FV = PV.\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{i.x.n} = PV.\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{i.n} = PV.e^{i.n}$ ។

(ពីព្រោះតាមរូបមន្តលីមីត $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e = 2.718281828....$) ។

ដូចនេះគេបានរូបមន្តថ្លៃអនាគតតាមអត្រាការប្រាក់ផ្ទួនបន្តបន្ទាប់ច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ

(មិនកំនត់) $\boxed{FV = PV \times e^{i.n}}$ ដែល $e = 2.71828....$ ជាគោលលោការីតនេពែរ ។

ឧទាហរណ៍ : គេយកប្រាក់ $50,000 ទៅផ្ញើក្នុងធនាគារមួយដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់

ផ្ទួនបន្តបន្ទាប់ច្រើនដង (មិនកំនត់) ក្នុងមួយឆ្នាំ $i = 6\% = 0.06$ ។

តើក្នុងរយះពេល 30 ឆ្នាំក្រោយមក គេបានថ្លៃអនាគតប៉ុន្មាន ?

ក្រោយពីផ្ញើរយះពេល 30 ឆ្នាំក្រោយមក គេនឹងទទួលបានថ្លៃអនាគត :

$FV = \$50000 \times (2.71828)^{(0.06)\times 30} = \$.....$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-លោកសារី យកប្រាក់ចំនួន \$10,000,000 ទៅផ្ញើក្នុងធនាគារមួយជាមួយ
អត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំគឺ $i = 25\%$ ។

ក. ចូរគណនាថ្លៃអនាគត់តាមការប្រាក់ទោល ។

ខ. ចូរគណនាថ្លៃអនាគត់តាមការប្រាក់ផ្ទួប ។

២-លោកសារី យកប្រាក់ \$40,000,000 ទៅផ្ញើក្នុងធនាគារមួយរយះពេល 6 ឆ្នាំ 9 ខែ
ជាមួយអត្រាការប្រាក់ផ្ទួបប្រចាំឆ្នាំ $i = 5\% = 0.05$ ។ ចូរគណនាថ្លៃអនាគត ?

៣-គេយកប្រាក់ដើម (ថ្លៃបច្ចុប្បន្ន) ចំនួន C_0 ទៅធ្វើវិនិយោគក្នុងរយះពេល 3 ឆ្នាំ
ជាមួយអត្រាការប្រាក់ផ្ទួបប្រចាំឆ្នាំ $i = 9\%$ ។ គេដឹងថាថ្លៃអនាគតគឺ \$12,950,290 ។

ចូរគណនាថ្លៃបច្ចុប្បន្ន (ប្រាក់ដើម) ?

៤-លោកសារី បានឱ្យលោកសារ៉ាតខ្ចីប្រាក់ចំនួន \$60,000 តាមអត្រាការប្រាក់ទោល
ប្រចាំឆ្នាំ 8% ។3 ឆ្នាំក្រោយមកលោកសារីបានប្រមូលទាំងដើម ទាំងការពីលោកសារ៉ាត
ហើយគាត់បានយកទៅផ្ញើក្នុងធនាគារមួយជាមួយអត្រាការប្រាក់ផ្ទួបប្រចាំឆ្នាំ 6% ។

ចូរគណនាតម្លៃអនាគតបន្ទាប់ពីលោកសារីផ្ញើក្នុងធនាគារ 4 ឆ្នាំ ?

៥-លោកសារ៉ាតបានយកប្រាក់ចំនួន \$200,000 ទៅចងការ តាមអត្រាការប្រាក់ផ្ទួប
ដូចតទៅ :

- $i_1 = 6\%$ (ក្នុង ១ឆ្នាំ) ក្នុងរយះពេល 3 ឆ្នាំដំបូង
- $i_2 = 8\%$ (ក្នុង ១ឆ្នាំ) ក្នុងរយះពេល 4 ឆ្នាំបន្ទាប់
- $i_3 = 10\%$ (ក្នុង ១ឆ្នាំ) ក្នុងរយះពេល 2 ឆ្នាំចុងក្រោយ ។

គណនាថ្លៃអនាគតនៅចុងឆ្នាំទី 9 ?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

៦-លោក សារី បានយកប្រាក់ចំនួន $40,000 ទៅផ្ញើក្នុងធនាគាមួយជាមួយ
អត្រាការប្រាក់ផ្ទួបប្រចាំឆ្នាំ $i = 12\%$ ។
តើលោកសារី ត្រូវផ្ញើធនាគារ រយះពេលប៉ុន្មានដើម្បីឱ្យបានថ្លៃអនាគតស្មើនឹង 4ដង
នៃប្រាក់ដើម ។

៧-លោកសារី យកប្រាក់ $100,000 ទៅផ្ញើក្នុងធនាគារមួយតាមអត្រាការប្រាក់ផ្ទួប ។
គេដឹងថា បើគាត់ផ្ញើក្នុងរយះពេល 8ឆ្នាំគាត់នឹងទទួលបានថ្លៃអនាគតស្មើនឹង4ដងនៃ
ថ្លៃបច្ចុប្បន្ន។ ចូរគណនាថ្លៃអនាគតក្នុងរយះពេល 5 ឆ្នាំក្រោយមក ?

៨-លោកសារី បានឱ្យលោក A ខ្ចីប្រាក់ចំនួន $20,000 តាមអត្រាការប្រាក់ទោល
ប្រចាំឆ្នាំ t% ។3 ឆ្នាំក្រោយមក លោកសារីបានប្រមូលទាំងដើម ទាំងការពីលោក A
ហើយយកទៅឱ្យលោក B ខ្ចីបន្តជាមួយអត្រាការប្រាក់ទោលប្រចាំឆ្នាំ $(t + 4)\%$ ។
2 ឆ្នាំបន្ទាប់ពីដាក់ឱ្យលោក B ខ្ចី លោកសារីប្រមូលប្រាក់ទាំងអស់ (ទាំងដើម ទាំងការ)
បានចំនួន $85,540 ។ ចូរកំនត់រកអត្រាការប្រាក់ t ?

៩-គេយកប្រាក់ចំនួន $800,000,000 ទៅផ្ញើក្នុងធនាគារមួយជាមួយអត្រាការប្រាក់ 6%
ក្នុងរយះពេល 12 ឆ្នាំ តាមអត្រាការប្រាក់ផ្ទួបបន្តបន្ទាប់ ។
ចូរគណនាថ្លៃអនាគត ?

១០-គេផ្ញើប្រាក់ក្នុងធនាគារមួយ ជាមួយអត្រាការប្រាក់ 8% ក្នុងរយះពេល 25 ឆ្នាំ
តាមគោលនយោបាយផ្ទួបការប្រាក់បន្តបន្ទាប់ ។ គេដឹងថាថ្លៃអនាគតស្មើ $7,389,000
ចូរគណនាថ្លៃបច្ចុប្បន្ន ?

១១-គេយកប្រាក់ចំនួន $600,000 ទៅធ្វើវិនិយោគរយះពេល 6ឆ្នាំ ជាមួយអត្រាការប្រាក់
ប្រចាំឆ្នាំ $i = 8\%$ ។ ចូរគណនាថៃអនាគត់តាមការប្រាក់ទោល ? តាមការប្រាក់ផ្ទួប ?
តាមការប្រាក់ផ្ទួបបន្តបន្ទាប់ ?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

១២-លោក A បានឱ្យប្រាក់លោក B ខ្ចីចំនួន $20,000 តាមអត្រាការប្រាក់ទោល ប្រចាំឆ្នាំ t% ។ 1 ឆ្នាំក្រោយមក លោក A បានប្រមូលប្រាក់ទាំងដើម ទាំងការពីលោក B ហើយបានដាក់ឱ្យលោក C ខ្ចីបន្តទៀតតាមអត្រាការប្រាក់ផ្ទួបប្រចាំឆ្នាំ t% ។ 3 ឆ្នាំបន្ទាប់ពីដាក់ឱ្យលោក C ខ្ចី លោក A ប្រមូលប្រាក់ទាំងដើម ទាំងការសរុបទាំងអស់បាន ចំនួន $29,282 ។ ចូរគណនាអត្រាការប្រាក់ t ?

១៣-គេយកប្រាក់ចំនួន 1 000 000 រៀល ទៅផ្ញើក្នុងធនាគារមួយ ជាមួយអត្រាការប្រាក់ 8% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។គេដឹងថា ធនាគារបានលើកទឹកចិត្តដល់អ្នកផ្ញើរបស់ខ្លួន ដោយអនុវត្តន៏ គោលនយោបាយ ការប្រាក់ផ្ទួបជាច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ (មិនកំនត់) ។

ចូរកំនត់រយះពេលវិនិយោគដើម្បី ឱ្យបានថ្លៃអនាគតស្មើ 7 389 000 រៀល ។

១៤-លោក ផល្គុន បានយកប្រាក់ $80,000 ទៅដាក់ផ្ញើក្នុងធនាគារ A ដោយទទួលបានអត្រាការប្រាក់ផ្ទួបប្រចាំឆ្នាំ 6% ។ 2ឆ្នាំក្រោយមកលោក ផល្គុន បានប្រមូលប្រាក់ទាំងដើមទាំងការពីក្នុងធនាគារ A ហើយយកទៅដាក់ផ្ញើក្នុងធនាគារ B តាមអត្រាការប្រាក់ផ្ទួបប្រចាំឆ្នាំ 8% ។

គេដឹងថា ធនាគារបានលើកទឹកចិត្តដល់អ្នកផ្ញើរបស់ខ្លួន ដោយអនុវត្តន៏ គោលនយោបាយ ការប្រាក់ផ្ទួបជាច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ (មិនកំនត់) ។

ចូរគណនាថ្លៃអនាគតបន្ទាប់ពីដាក់ផ្ញើក្នុងធនាគារ B រយះពេល3ឆ្នាំមក ។

១៥-លោកពេជ្រ បានយកប្រាក់ចំនួន $40,000 ទៅវិនិយោគតាមអត្រាការប្រាក់ 12% ក្នុងមួយឆ្នាំផ្ទួបបន្តបន្ទាប់ ។

ក. ចូរគណនាថ្លៃអនាគត ដែលលោកពេជ្រ ទទួលបានបើគាត់វិនិយោគរយះពេល 3 ឆ្នាំ ។

ខ. តើលោកពេជ្រត្រូវវិនិយោគក្នុងរយះពេលប៉ុន្មានទើបទទួលបានថ្លៃអនាគតស្មើនឹង 2 ដងនៃប្រាក់ដើម (ថ្លៃបច្ចុប្បន្ន) ។

ធនលាភ ឬ សំណងប្រចាំគ្រា
(ANNUITY)

១-និយមន័យ :

ក. Annuities : គឺជា ស៊េរី នៃការចំណាយ (សង ឬ បង់ប្រាក់សន្សំជាប្រចាំ) លើចន្លោះពេលមួយទៀងទាត់ស្មើៗគ្នា ។

ចន្លោះរយៈពេលស្មើគ្នានីមួយៗ ហៅថា គ្រា ឬកាល ឬហៅថាខួប ដែលជាទូទៅគឺ មួយឆ្នាំ ។

☞ **ធនលាភមួយអាចកំនត់បានលុះត្រាតែគេស្គាល់អំពី :**

-ថ្ងៃ ខែ ឆ្នាំ បង់លើកដំបូង

-ចំនួនទឹកប្រាក់ដែលបានបង់ក្នុងមួយលើកៗ

-ចំនួនដងដែលបានបង់

-ចន្លោះរយៈពេលបង់ម្តងៗ ជាទូទៅ គិតជាឆ្នាំ ឆមាស ឬ ត្រីមាស ឬ ខែ ។

-អត្រាការប្រាក់ផ្ទួបប្រចាំគ្រា ឬ កាល ។

☞ **គោលបំណងនៃធនលាភ :**

-ដើម្បីសន្សំប្រាក់មួយចំនួនក្នុងខ្ទង់ប្រាក់ ឬ បង្កើនទុនមួយចំនួន

-ដើម្បីសងរំលោះជាបណ្តើរៗនូវទឹកប្រាក់មួយចំនួនដែលបានខ្ចី ។

☞ **ប្រភេទនៃធនលាភមានពីរប្រភេទ :**

-ធនលាភធម្មតា ឬធនលាភបង់ដើមគ្រា :គឺជាការបូកសរុបទឹកប្រាក់ ដែលបានបង់ទាំងអស់នៅពេលបានបង់រួចភ្លាម ។

-ធនលាភបង់ដើមគ្រា : គឺជាការបូកសរុបទឹកប្រាក់ដែលបានបង់ទាំងអស់ នៅក្រោយមួយគ្រាបន្ទាប់ពីការបង់ចុងក្រោយ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

២-ថ្លៃអនាគត (Future Value)

១. ធនលាភបង់ចុងគ្រា (Ordinary Annuity)

ថ្លៃអនាគតរបស់ស៊ីតធនលាភមួយ គឺជាផលបូកសរុបនៃថ្លៃអនាគតរបស់ធនលាភទាំងឡាយគិតត្រឹមពេលបង់បញ្ចប់ចុងក្រោយបង្អស់ ។

ឧបមាថា A_k ជាប្រាក់ដែលត្រូវបង់នៅលើកទី k ដែល $k = 1,2,3,....,n$

i ជាអត្រាការប្រាក់

n ជារយះពេល

FV_A ជាថ្លៃអនាគត

គេបាន $FV_A = FV_1 + FV_2 + FV_3 + ... + FV_n = \sum_{k=1}^{n}(FV_k)$

ដោយគេមាន : $FV_1 = A_1.(1+i)^{n-1}$ (ថ្លៃអនាគតគ្រាទី១ មានរយះពេល $(n-1)$)

$FV_2 = A_2.(1+i)^{n-2}$ (ថ្លៃអនាគតគ្រាទី២មានរយះពេល $(n-2)$)

$FV_3 = A_3.(1+i)^{n-3}$ (ថ្លៃអនាគតគ្រាទី៣មានរយះពេល $(n-3)$)

$FV_{n-1} = A_{n-1}.(1+i)^{n-(n-1)}$ (ថ្លៃអនាគតគ្រាទី$n-1$ មានរយះពេល 1)

$FV_n = A_n.(1+i)^{n-n} = A_n$ (ថ្លៃអនាគតគ្រាទី n មានរយះពេល 0)

ដូចនេះ $FV_A = A_1(1+i)^{n-1} + A_2(1+i)^{n-2} + A_3(1+i)^{n-3} + ... + A_{n-1}(1+i)^1 + A_n$

$$\boxed{FV_A = \sum_{k=1}^{n}\left[A_k.(1+i)^{n-k}\right]} \quad (1)$$

-បើគេមាន $A_1 = A_2 = A_3 = ... = A_n = A$ នោះរូបមន្ត (1) អាចសរសេរ ជា :

$$\boxed{FV_A = \sum_{k=1}^{n}\left[A(1+i)^{n-k}\right] = A\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

(ហៅថាថ្លៃអនាគតនៃធនលាភថេរបង់ចុងគ្រា Constant annuities) ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ឧទាហរណ៍ ៖គេបានដាក់ប្រាក់សន្សំក្នុងគណនីមួយរៀងរាល់ចុងឆ្នាំនូវសាច់ប្រាក់ថេរចំនួន $400 ។ចូរកំនត់រកចំនួនសាច់ប្រាក់សរុបក្នុងគណនីនេះនៅពេលគាត់បានដាក់ប្រាក់លើកទី 5 បើគេដឹងថាអត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំឆ្នាំគឺ $i = 12\%$ ។

តាមរូបមន្ត $FV_A = A.\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ ដោយ $\begin{cases} A = \$400 \\ i = 12\% = 0.12 \\ n = 5 \end{cases}$

ដូចនេះ $FV_A = 400 \times \frac{(1+0.12)^5}{0.12} = \$.......$ ។

២. ធនលាភបង់ដើមគ្រា (Annuity Due)

ឧបមាថា A_k ជាប្រាក់ដែលត្រូវបង់នៅលើកទី k ដែល $k = 1,2,3,....,n$

i ជាអត្រាការប្រាក់

n ជារយះពេល

V_n ជាថ្លៃអនាគត

គេបាន $FV_A = FV_1 + FV_2 + FV_3 + ... + FV_n = \sum_{k=1}^{n}(FV_k)$

ដោយគេមាន ៖ $FV_1 = A_1.(1+i)^n$ (ថ្លៃអនាគតគ្រាទី១ មានរយះពេល n)

$FV_2 = A_2.(1+i)^{n-1}$ (ថ្លៃអនាគតគ្រាទី២មានរយះពេល $(n-1)$)

$FV_3 = A_3.(1+i)^{n-2}$ (ថ្លៃអនាគតគ្រាទី៣មានរយះពេល $(n-2)$)

$FV_{n-1} = A_{n-1}.(1+i)^2$ (ថ្លៃអនាគតគ្រាទី$n-1$ មានរយះពេល 2)

$FV_n = A_n.(1+i)^1 = A_n(1+i)$ (ថ្លៃអនាគតគ្រាទី n មានរយះពេល 1)

$$FV_A = A_1(1+i)^n + A_2(1+i)^{n-1} + A_3(1+i)^{n-2} + ... + A_{n-1}(1+i)^2 + A_n(1+i)$$

$$\boxed{FV_A = \sum_{k=1}^{n}\left[A_k.(1+i)^{n-k+1}\right]} \quad (2)$$

-បើគេមាន $A_1 = A_2 = A_3 = ... = A_n = A$ នោះរូបមន្ត (2) អាចសរសេរ ជា :

$$\boxed{FV_A = \sum_{k=1}^{n}\left[A(1+i)^{n-k+1}\right] = A(1+i)\times\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

(ហៅថាថ្លៃអនាគតនៃធនលាភថេរបង់ដើមគ្រា Constant annuities) ។

ឧទាហរណ៍ : លោកសារីបានដាក់ប្រាក់ $300 ទៅក្នុងគណនីសន្សំនៅថ្ងៃ 1 ខែ 1 រៀងរាល់ឆ្នាំ ចាប់ពីឆ្នាំ 2000 ។ ចូរកប្រាក់សរុបដែលលោកសារីទទួលបាននៅថ្ងៃ 31 ខែ 12 ឆ្នាំ 2005 ? គេដឹងថាអត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំឆ្នាំស្មើនឹង $i = 12\%$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $FV_A = A(1+i).\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ ដោយ $\begin{cases} A = \$300 \\ i = 12\% = 0.12 \\ n = 6 \end{cases}$

ដូចនេះ $FV_A = 300.(1+0.12).\dfrac{(1+0.12)^6 - 1}{0.12} = \$......$ ។

៣. ថ្លៃអនាគតរបស់ធនលាភថេរបង់ចុងគ្រា គិតត្រឹម d កាលក្រោយពេលបង់លើកក្រោយបង្អស់ :

ឧបមាថា V_n ជាថ្លៃអនាគតនៃធនលាភបង់ចុងគ្រាចំនួន n លើកដែលសាច់ប្រាក់បង់មួយលើកៗមានចំនួនថេរ A ជាមួយអត្រាការប្រាក់ផ្គួប i នោះគេបាន :

$FV_A = A.\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ ។

ក្រោយពីការបង់លើកទី n បើអ្នកពុំបានបង់ប្រាក់បន្ថែម ឬ ដកប្រាក់នោះទេ គឺទុកសម្រាប់យកការប្រាក់ក្នុងរយះពេល d កាលទៀត ជាមួយអត្រាការប្រាក់ i ដដែល ។ បើ FV_A^d ជាថ្លៃអនាគតរបស់ធនលាភដែលត្រូវរកនោះគេបាន :

$$\boxed{FV_A^d = FV_A.(1+i)^d = A.\frac{(1+i)^n - 1}{i}.(1+i)^d}$$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ឧទាហរណ៍ ៖ លោកសារីបានដាក់ប្រាក់សន្សំក្នុងគណនីរបស់គាត់ចំនួន400 000 000 រៀល រៀងរាល់ចុងឆ្នាំ ជាមួយអត្រាការប្រាក់ផ្តួប $i = 12\%$ ។

បន្ទាប់ពីគាត់បានបង់ប្រាក់លើកទី6រួច គាត់ពុំបានបង់ប្រាក់បន្ថែម ឬក៏ដកប្រាក់នោះទេ គឺលោកសារីបានទុកប្រាក់នោះសម្រាប់យកការប្រាក់ក្នុងរយះពេល 4ឆ្នាំទៀត ជាមួយអត្រាការប្រាក់ដ៏ដែល ។

ចូរគណនាថ្លៃអនាគតដែលលោកសារីទទួលបានបន្ទាប់ពីទុកយកការប្រាក់ 4 ឆ្នាំក្រោយមក ?

តាមរូបមន្ត $FV_A^d = A.\frac{(1+i)^n - 1}{i}.(1+i)^d$ ដោយ $\begin{cases} A = 400{,}000{,}000 \\ i = 12\% = 0.12 \\ n = 6 \\ d = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ ៖ $FV_A^4 = 400{,}000{,}000.\frac{(1+0.12)^6 - 1}{0.12}.(1+0.12)^4 = ...$

៣ -ថ្លៃបច្ចុប្បន្ន (Present Value)

១. ថ្លៃបច្ចុប្បន្ននៃធនលាភបង់ចុងគ្រា ៖

-គឺជាចំនួនទឹកប្រាក់ដែលត្រូវដាក់វិនិយោគនៅពេលនេះ ជាមួយអត្រាការប្រាក់មួយកំនត់ដើម្បី សម្រាប់ដកចំណាយ ជាបណ្តើរៗនៅថ្ងៃក្រោយ ។

-គឺជាចំនួនទឹកប្រាក់ដែលកំណត់សងជាប្រចាំ លើ រយះពេលស្មើគ្នាចំនួន n ដង ដើម្បីរំលោះបំណុលដែលបានខ្ចីក្នុងពេលបច្ចុប្បន្នចំនួន V_0 (ហៅថាសំណងប្រចាំគ្រា) ។

-បើយើងតាង V_0 ជាថ្លៃបច្ចុប្បន្ននោះគេបាន ៖

$$PV = \frac{A_1}{1+i} + \frac{A_2}{(1+i)^2} + \frac{A_3}{(1+i)^3} + ... + \frac{A_n}{(1+i)^n} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{A_k}{(1+i)^k}\right] \quad (1)$$

-បើ $A_1 = A_2 = A_3 = ... = A_n = A$ នោះតាមរូបមន្ត (1) គេទាញបាន ៖

$$\boxed{PV = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{A}{(1+k)^k}\right] = A.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ឧទាហរណ៍ ១: តើយើងត្រូវដាក់ប្រាក់ផ្ញើក្នុងធនាគារចំនួនប៉ុន្មាននៅថ្ងៃ $01/01/2004$ ដើម្បីឱ្យយើង

អាចដកវិញបានចាប់តាំងពីថ្ងៃ $01/01/2005$ មួយឆ្នាំៗចំនួន $\$1000$ ចំនួន 4 ដង ?

គេដឹងថាអត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំឆ្នាំគឺ $i = 18\%$ ។

តាមរូបមន្ត $PV = A.\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ ដោយ $\begin{cases} A = \$1000 \\ i = 18\% = 0.18 \\ n = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $PV = 1000.\dfrac{1-(1+0.18)^{-4}}{0.18} = \$....$

ឧទាហរណ៍២ : លោក A បានឱ្យលោក B ខ្ចីប្រាក់ចំនួន $\$20,000$ ក្នុងរយះពេល 5 ឆ្នាំ ដោយធ្វើកិច្ចសន្យាមួយតម្រូវឱ្យលោក B សងបំណុលនេះរៀងរាល់ចុងឆ្នាំ នូវសាច់ប្រាក់ថេរ ជាមួយអត្រាការប្រាក់ $i = 20\%$ ក្នុងមួយឆ្នាំ ។

តើលោក B ត្រូវសងបំណុលនេះក្នុងមួយឆ្នាំៗប៉ុន្មាន ?

តាមរូបមន្ត $PV = A.\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

គេទាញបាន $= \dfrac{PV}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$ ដោយ $\begin{cases} PV = \$20,000 \\ i = 20\% = 0.20 \\ n = 5 \end{cases}$

ដូចនេះ $A = \dfrac{20,000}{\dfrac{1-(1+0.20)^{-5}}{0.20}} = \$.....$

ឧទាហរណ៍៣: លោក A បានខ្ចីប្រាក់ពីលោក B ចំនួន $\$800,000$ ជាមួយ អត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំឆ្នាំ $i = 6\%$ ដោយសន្យា សងបំណុលនេះ ទៅលោក B វិញរៀងរាល់ចុងឆ្នាំនូវចំនួនសាច់ប្រាក់ $\$230,873$ ថេរ ។

តើរយះពេលប៉ុន្មានឆ្នាំទើបលោក A សងបំណុលទៅលោក B រួចរាល់ ?

(សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង) ។

៤.មូលនិធិទូទាត់បំណុល (SINKING FUND)

គឺជាមូលនិធិសន្សំទុកដោយឡែក ដោយរដ្ឋាភិបាល-ក្រុមហ៊ុន...... ។ ល .។ ដែលត្រូវបានគេប្រើ សម្រាប់ទូទាត់ បំណុល តាមកិរិតមួយកំនត់ ។

ឧទាហរណ៍ : នៅចុងឆ្នាំ 2005 លោក A ត្រូវការប្រាក់ចំនួន \$200,000 ដើម្បីបើកហាងទំនិញមួយ ។តើលោក A ត្រូវសន្សំប្រាក់តាម Annuities ថេរក្នុងមួយឆ្នាំៗ ចំនួនប៉ុន្មាន ? អត្រាការប្រាក់ 20% ថ្ងៃដែលបង់ប្រាក់សន្សំលើកដំបូងនៅដើមឆ្នាំ 2002 ។

តាមរូបមន្តធនលាភបង់ដើមគ្រា : $FV_A = A(1+i).\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

គេទាញបាន $A = \dfrac{FV_A}{(1+i)}.\dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$ ដោយ $\begin{cases} FV_A = \$200{,}000 \\ i = 20\% = 0.20 \\ n = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $A = \dfrac{200{,}000}{1+0.20}.\dfrac{0.20}{(1+0.20)^4 - 1} = \$.....$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់អនុវត្តន៍

1-ដើម្បីបង្កើនទុន អាជីវករម្នាក់បានដាក់ប្រាក់សន្សំក្នុងគណនីរបស់គាត់រៀងរាល់ចុងឆ្នាំ នូវចំនួនសាច់ប្រាក់ថេរ \$5000 ជាមួយអត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំឆ្នាំ 20% ។ ចូរគណនាចំនួនសាច់ប្រាក់ក្នុងគណនីរបស់អាជីវករនៅពេលដែលគាត់ដាក់ប្រាក់លើកទី 5 ។

2-លោក A បានដាក់ប្រាក់សន្សំរៀងរាល់ឆ្នាំចំនួន \$2500 ចាប់ពីថ្ងៃ 01/01/2000 ។ គេដឹងថាអត្រាការប្រាក់ផ្គួបប្រចាំឆ្នាំ $i = 20\%$ ។ ចូរកំនត់ប្រាក់ដែលលោក A ទទួលបាន នៅ ថ្ងៃ 01/01/2005 ។

3-លោកសារីបានសន្សំប្រាក់ក្នុងធនាគារដោយបង់ជាប្រចាំក្នុងមួយឆ្នាំៗ \$1500

ចាប់ពីថ្ងៃ 01/01/2000 ។

ថ្ងៃបង់ចុងក្រោយ 31/12/2005 ហើយអត្រាការប្រាក់ 18% ។

ចូរគណនាថ្លៃអនាគតនៃធនលាភរបស់លោកសារី :

ក. គិតដល់ថ្ងៃ 31/12/2005 ។

ខ. គិតដល់ថ្ងៃ 01/01/2007 ។

4-អាជីវករម្នាក់ត្រូវការប្រាក់ចំនួន \$50,000 ដើម្បីពង្រីកអាជីវកម្មរបស់គាត់នៅចុង ឆ្នាំ 2006 ។

តើអាជីវករនោះត្រូវសន្សំប្រាក់តាម Annuities ថេរក្នុងមួយឆ្នាំប៉ុន្មាន ?

គេដឹងថាអត្រាការប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ 24% ហើយគាត់ចាប់ផ្តើមសន្សំពីដើមឆ្នាំ 2003 ។

5-លោ A បានខ្ចីប្រាក់ធនាគារចំនួន \$20,000 ជាមួយអត្រាការប្រាក់ 22%

ហើយត្រូវសងវិញមួយឆ្នាំម្តងៗចំនួន 5ឆ្នាំតាម Annuities ថេរ ។

តើប្រាក់ដែលត្រូវសងនៅចុងឆ្នាំនីមួយៗប៉ុន្មាន ?

6-If you invest \$8,000 per period for the following number of period ,how much would you have ?

a / 7 years at 9 percent

b / 40 years at 11 percent

7-You invest a single amount of $12,000 for 5years at 10 percent. At the end of 5years you take the proceeds and invest them for 12 years at 15 percent. How much will you have after 17 years ?

8-Mrs.Crawford will receive $6,500 a year for the nex 14 years from her trust. If an 8 percent interest rate is applied, what is the current value of the future payments ?

9-At a growth (interest) rate of 8 percent annually, how long will it take a sum to double ? To triple ? Select the year that is closest to the correct answer .

10-How much would you have to invest to day to receive:

a / $12,000 in 6 years at 12 percent ?

b / $15,000 in 15 years at 8 percent ?

c / $5,000 each year for 10 years at 8 percent ?

d / $40,000 each year for 40 years at 5 percent ?

11-Your grandfather has offered you choice of one of the three following alternatives:$5,000 now , $1,000 a year for eight , or $12,000 at the end of eight years. Assuming you could earn 11 percent annually, which alternative should you choose ? If you could earn 12 percent annually, would you still choose the same alternative ?

12-លោក A ត្រូវបានលោក B ប្តឹងហើយតុលាការបានតម្រូវឱ្យលោក A សងថ្លៃជំងឺចិត្ត ទៅឱ្យលោក B តាមលក្ខខ័ណ្ឌដូចខាងក្រោម :

-បើបង់ក្នុងថ្ងៃនេះគឺត្រូវសងចំនួន $10,000 ។

-បើបង់សងជារៀងរាល់ឆ្នាំសម្រាប់ 5ឆ្នាំ គឺក្នុងមួយឆ្នាំៗត្រូវបង់ $2,500 ។

-បើបង់សងក្នុងថ្ងៃនេះ $6,000 រង់ចាំ 2ឆ្នាំទៀតគឺត្រូវបង់សង $5,600 ។

ឧបមាថាអត្រាការប្រាក់ 8% ត្រូវបានគេអនុវត្តន៍ ។ តើលោក A គួជ្រើសរើសយកលក្ខខ័ណ្ឌ មួយណា សម្រាប់បង់សងទៅឱ្យលោក B ?

វិភាគលើបន្សំ

១.ហ្វាក់តូរ្យែល (Factorial) :

ដែលហៅថាហ្វាក់តូរ្យែលនៃចំនួន n ជាផលគុណនៃ n ចំនួនគត់វិជ្ជមានដំបូង ឬ ជាផលគុណចំនួនគត់វិជ្ជមានតគ្នា ពី 1 រហូតដល់ n ដែលគេកំនត់សរសេរ :

$$\boxed{n! = 1\times 2\times 3\times ....\times n}$$ ។

ឧទាហរណ៍ : $1! = 1$

$2! = 1.2 = 2$

$3! = 1.2.3 = 6$

$4! = 1.2.3.4 = 24$

$5! = 1.2.3.4.5 = 120$

$6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$

$7! = 1.2.3.4.5.6.7 = 5040$

$8! = 1.2.3.4.5.6.7.8 = 40320$

$9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362880$

$10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800$

គេពិនិត្យឃើញថា :

$$10! = 9!.10 = 8!.9.10 = 7!.8.9.10 = 6!.7.8.9.10 = 5!.6.7.8.9.10 = ...$$

ជាទូទៅគេទាញបាន :

$$\boxed{n! = (n-1)!n = (n-2)!(n-1)n = (n-3)!(n-2)(n-1)n = ...}$$

សំគាល់ : $0! = 1! = 1$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ឧទាហរណ៍ ៖ គេអោយ $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!}$ ។

បង្ហាញថា $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$?

គេមាន ៖ $\frac{k}{(k+1)\,!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)\,!} = \frac{(k+1)}{(k+1)\,!} - \frac{1}{(k+1)\,!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)\,!}$

គេបាន ៖ $S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{(n+1)!}\right]$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

ដូចនេះ $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{(n+1)!}\right] = 1$ ។

២.តំរៀបមិនសារឡើងវិញ (Arrangement) ៖

តំរៀប p ធាតុក្នុងចំណោម n ធាតុនៃសំនុំ E គឺជាសំនុំរងនៃ E ដែលមាន p ធាតុខុសៗគ្នា រៀបតាមលំដាប់មួយកំនត់ ។ គេកំនត់តាងចំនួនតំរៀប p ធាតុក្នុងចំនោម n ធាតុដោយ ៖

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2).....(n-p+1)}$$ ។

ឧទាហរណ៍ ៖ តើគេអាចចំលាស់អក្សរ A, B, C យកម្តងពីរតួបានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា ?

គេបាន $(A,B,C) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AB, BA \\ AC, CA \\ BC, CB \end{array}\right.$ មាន 6 របៀបខុសៗគ្នា ។

គេសង្កេតឃើញថា $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1.2.3}{1} = 6$ របៀប ។

ដូចនេះចំនួនចំលាស់នៃតួអក្សរបីតួ A, B, C ខុសៗគ្នា យកម្តងពីរតួ ជាតំរៀបមិនសារឡើងវិញ ជាទូទៅចំនួនចំលាស់ n ធាតុ ចាប់យកម្តង p ធាតុ ជាតំរៀបមិនសារឡើងវិញដែលកំនត់ដោយ

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!},\ (n \ge p)}$$ ។

សំគាល់: តំរៀបមិនសារឡើងវិញគិតពីរលំដាប់ ពីព្រោះ AB និង BA ជាចំលាស់ខុសគ្នា ។

ឧទាហរណ៏ ៖

តើគេអាចតំរៀបតួអក្សរដែលមានពីរពាក្យខុសៗគ្នាចេញពីតួអក្សរដែលមានបួនពាក្យ LOVE ខុសៗគ្នាបានប៉ុន្មានរបៀប ?

របៀបនៃការរៀបតួអក្សរនេះជាតំរៀបមិនសារឡើងវិញដែលកំនត់ដោយ ៖

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$$ របៀប ។

គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ចំលើយតាមការគូសបំព្រួញ ៖

$$(LOVE) \Rightarrow \begin{cases} LO, OL \\ LV, VL \\ LE, EL \\ OV, VO \\ OE, EO \\ VE, EV \end{cases}$$ មាន 12 របៀប ។

៣.ចំលាស់មិនសាឡើងវិញ (Permultation) ៖

ចំលាស់ n ធាតុខុសៗគ្នា គឺជាតំរៀប n ធាតុ ក្នុងចំណោម n ធាតុ ។

គេកំនត់ចំនួនចំលាស់ n ធាតុដោយ ៖

$$\boxed{P_n = A_n^n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times n}$$ ។

ឧទាហរណ៏ ៖តើគេអាចចំលាស់តួអក្សរដែលមានបីពាក្យ ABC បានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នា

គេបាន $P_3 = 3! = 1.2.3 = 6$ របៀប ។

គេអាចគូសបំព្រួញ ៖ $(ABC) \Rightarrow \begin{cases} ABC, ACB \\ BAC, BCA \\ CAB, CBA \end{cases}$ មាន 6 របៀប ។

ឧទាហរណ៏ ៖ តើគេអាចបង្កើតពាក្យដែលមានបួនតួអក្សរដោយប្រើតួអក្សរនៃពាក្យ MATH បានប៉ុន្មានពាក្យ ?

ពាក្យដែលអាចបង្កើតបានមានចំនួន $P_4 = 4! = 1.2.3.4 = 24$ ពាក្យ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

៤.បន្សំមិនសារឡើងវិញ (Combination) :

បន្សំ p ធាតុក្នុងចំណោម n ធាតុ ជាតំរៀបមិនគិតលំដាប់ដែលកំនត់ដោយ :

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}} \quad (n \geq p) \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍ :

ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីបួនគ្រាប់ចុះលេខខុសៗគ្នា A, B, C, D ។

គេចាប់យកឃ្លី បីគ្រាប់ពីក្នុងថង់ ។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នានៃការចាប់យកគ្រាប់ឃ្លី ?

ការចាប់យកឃ្លីបីក្នុងចំណោមឃ្លីបួនគឺជាបន្សំ 3 ក្នុងចំណោម 4 ។

គេបាន $C_4^3 = \frac{4!}{3!.(4-3)!} = \frac{1.2.3.4}{1.2.3.1} = 4$ របៀប ។

គេអាចគូសបំព្រួញ $(ABCD) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} ABC \\ ABD \\ ACD \\ BCD \end{array}\right.$ មាន 4 របៀប ។

ឧទាហរណ៍ :

គេហូតយកបៀរ 3 បីសន្លឹកពីក្នុងហូដែលមានបៀរ 52 សន្លឹក ។

តើមានប៉ុន្មានរបៀបខុសៗគ្នានៃការហូតចាប់យកបៀរជាបន្សំ 3 ក្នុងចំណោម 52 ។

គេបាន $C_{52}^3 = \frac{52!}{3!.(52-3)!} = \frac{49!.50.51.52}{1.2.3.49!} = 22100$ របៀប ។

៥.តំរៀបសារឡើងវិញ (Arrangement with Repetition) :

តំរៀបសារឡើងវិញ p ធាតុ ក្នុងចំណោម n ធាតុគឺជាតំរៀបដែលធាតុនីមួយៗ

អាចមានវត្តមាន $1,2,3,\ldots,n$ ដង ។

គេកំនត់សរសេរ : $\boxed{\overline{A_n^p} = n^p}$ ។

ឧទាហរណ៍ : តើមានប៉ុន្មានចំនួនដែលមានលេខពីរខ្ទង់ ដែលបង្កើតឡើង ពីលេខ $\{1,2,3,4\}$

ចំនួនតំរៀបនៃលេខគឺជាតំរៀបសារឡើងវិញកំនត់ដោយ : $\overline{A_4^2} = 4^2 = 16$ របៀប ។

លេខទាំងនោះគឺ : $\begin{cases} 11\ ,12,\ 13\ ,14 \\ 22\ ,21\ ,23\ ,24 \\ 31\ ,32\ ,33\ ,34 \\ 41\ ,42\ ,43\ ,44 \end{cases}$ មាន 16 ចំនួន ។

៦.ចំលាស់សារឡើងវិញ (Permultation with Repetition) :

គេអោយសំនុំ E មាន n ធាតុ ដែលក្នុងនោះ n_1 ជាធាតុប្រភេទទី១ , n_2 ជាធាតុប្រភេទទី២ , n_3 ជាធាតុប្រភេទទី៣ ,........., n_p ជាធាតុប្រភេទទី p ដោយ $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_p = n$

ចំនួនចំលាស់សារឡើងវិញនៃ n ធាតុ គឺជាចំលាស់អាចបែងចែកបានដែលកំនត់តាងដោយ :

$$\boxed{\overline{P_n} = \frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!.....n_p!}}$$ ។

ឧទាហរណ៍ : តើគេអាចបង្កើតពាក្យដែលមាន 3 អក្សរបានប៉ុន្មានដោយប្រើអក្សរនៃពាក្យ

BBU ?

ក្នុងពាក្យ BBU មានអក្សរ B ចំនួន 2 អក្សរ និង U ចំនួន 1

ដូចនេះចំនួនពាក្យដែលមាន3អក្សរគឺ : $\overline{P_3} = \frac{3!}{2!.1!} = \frac{6}{2} = 3$ ពាក្យ ។

៧.បន្សំសារឡើងវិញ (Combiation with Repetition) :

បន្សំសារឡើងវិញនៃ p ធាតុ ក្នុងចំនោម n ធាតុគឺជាបន្សំ ដែលធាតុនីមួយៗអាចមានវត្តមានច្រើនដង ។

គេតាងបន្សំសារឡើងវិញនៃ p ធាតុ ក្នុងចំនោម n ធាតុដោយ :

$$\boxed{\overline{C_n^p} = \frac{(n+p-1)!}{p!.(n-1)!}}$$ ។

ឧទាហរណ៏ :

ចូររកបន្សំនៃពីតួរអក្សរចេញពីតួរអក្សរបួន A, B, C, D ដែលអក្សរនីមួយៗអាចមានច្រើនដង តាមបំរាប់បន្សំនៃតួអក្សរជាបន្សំសារឡើងវិញ ។

គេបាន : $\overline{C_4^2} = \dfrac{(4+2-1)!}{2!.(4-1)!} = \dfrac{5!}{2!.3!} = \dfrac{120}{12} = 10$ ។

៩.ទ្វេធាញូតុន $\left(\text{Binom de Newton}\right)$

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^2 a^{n-1}.b + C_n^2 a^{n-2}.b^2 + ... + C_n^n b^n}$$ ។

សំគាល់ : ទ្វេធាសំខាន់ៗគួរកត់សំគាល់

1. $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

2. $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + ... + C_n^0$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. គណនាផលបូក ៖ $S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n!$ ។

2. តើចំនួន 2005! មានលេខសូន្យប៉ុន្មាន ?

3. គណនាតំលៃ A_5^3 , A_6^4 A_7^2 ។

4. គណនាតំលៃនៃ C_4^3 , C_6^4, C_7^2 ។

5. ចូរបង្ហាញថា ៖

ក. $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{A_{n+2}^3 - A_{n+1}^3}{6}$

ខ. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{A_{n+2}^3 + A_{n+1}^3}{6}$

6. ចូរបង្ហាញថា $A_{n+p}^2 + A_{n+p+1}^2 = 2(n+p)^2$

7. ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ $A_{n+3}^3 + A_{n+4}^3 = 2n^3 + 7n + 150$ ។

8. ចូរគណនាផលបូក $S_n = \dfrac{1}{A_3^3} + \dfrac{1}{A_4^3} + \dfrac{1}{A_5^3} + ... + \dfrac{1}{A_{n+1}^3}$ រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ។

9. ចូរបង្ហាញថា $\left[\dfrac{(p-1)!}{n!} + \dfrac{(n-1)!}{p!}\right] \times \dfrac{n!.p!}{n(p!)^2 + p(n!)^2} = \dfrac{1}{np}$ ។

10. ចូរបង្ហាញថា $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

11. ចូរបង្ហាញថា $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

12. ចូរបង្ហាញថា $C_n^p = C_{n-3}^p + 3C_{n-3}^{p-1} + 3C_{n-3}^{p-2} + C_{n-3}^{p-3}$

13. គេមានស្វីត $u_0 = 1$ និង $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{C_n^k}\right)$ ។ ចូរបង្ហាញថា $u_n = 2 + \dfrac{2}{n} + \sum\limits_{k=2}^{n-2} \left(\dfrac{1}{C_n^k}\right)$?

14. ដោះស្រាយសមីការ $C_{n+1}^3 + C_{n+2}^3 = \dfrac{17}{6}n^2 - \dfrac{23}{6}n$ ។

15. បង្ហាញថា $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ ។ រួចគណនាផលបូក $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \left[(-1)^p.C_n^p\right]$

16. គេឱ្យ $N = 1! + 2! + 3! + 4! + ... + 1998!$ ។ ចូររកបីលេខចុងក្រោយនៃចំនួន N ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

17. គេឱ្យចំនួន $N = 2000!+2001!+2002!+.....+2006!$ ។

តើចំនួន N មានលេខសូន្យចុងក្រោយបង្អស់ប៉ុន្មាន?

18. ចូរបង្ហាញថា $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

រួចទាញឱ្យបានថា $C_n^0.C_n^1.C_n^2.........C_n^n \le (n+1)!.\left[\frac{2^{n+1}-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}$ ។

19. ក-ដោយប្រើទ្វេធាញូតុនចូរពន្លាត : $(1+x)^{10}$ ។

ខ-ទាញរកតំលៃនៃ $S = C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + ... + C_{10}^{10}$ ។

20 . បង្ហាញថា : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ ។

21. បង្ហាញថា : $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n.2^{n-1}$ ។

22. ក-គណនា $I_n = \int_0^1 (1+x)^n.dx$ ។

ខ-បង្ហាញថា : $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

23. ក-គណនា $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n.dx$

ខ-គណនា $S_n = C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - .... + (-1)^n.\frac{1}{2n+1}.C_n^n$ ។

24. គេហូតបៀរបួនសន្លឹកពីក្នុងហូដោយចៃដន្យ ។

តើមានរបៀបនៃការហូតខុសៗគ្នាប៉ុន្មានរបៀប ?

25. ក្នុងពាក្យ BANANA តើគេអាចសរសេរបានប៉ុន្មានរបៀបអាចបែងចែកបានខុសៗគ្នា

26. សិស្ស 10 នាក់ ចូលរួមប្រលងប្រជែងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា ។

តើមានប៉ុន្មានរបៀបដែលសិស្ស ជាប់ចំនាត់ថ្នាក់លេខ១ លេខ២ និងលេខ៣ ?

27. មនុស្សមួយក្រុមមានគ្នា 10 នាក់ តើគេអាចបង្កើតបានប៉ុន្មានគណៈកម្មការខុសៗគ្នា

28. កាក់មួយមានមុខ A និង B ត្រូវបានគេបោះបីដង ។

តើមានប៉ុន្មានរបៀបដែលមុខកាក់ចេញ ?

29. គេមានស្វីត (I_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ដោយ $I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$

ក-ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គ្រប់ $n \geq 1$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ រួចទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$ ។

30. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេឱ្យ $I_n = \frac{2}{2^{n+1}.n!}\int_0^1 (1-t)^n.e^{\frac{t}{2}}.dt$ ។

ក-ដោយប្រើអាំងតេក្រាលតាមផ្នែកចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $n \geq 1: I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}.(n+1)!}$ ។

គ-ទាញឱ្យបានថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ គេមានសមភាព :

$\sqrt{e} = 1+\frac{1}{2}.\frac{1}{1!}+\frac{1}{2^2}.\frac{1}{2!}+\frac{1}{2^3}.\frac{1}{3!}+......+\frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!}+I_n$ ។

ឃ-ចូរទាញបង្ហាញថា $\sqrt{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}.\frac{1}{1!}+\frac{1}{2^2}.\frac{1}{2!}+\frac{1}{2^3}.\frac{1}{3!}+......+\frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!}\right)$ ។

31. ក.ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 (x+2)^n.dx$

ខ.ទាញឱ្យបានថា $\frac{1}{n+1}C_n^0 + \frac{2}{n}C_n^1 + \frac{2^2}{n-1}C_n^2 + ...+2^n C_n^n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$

32. ក.គណនាអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 (1-x)^n.dx$

ខ.ទាញឱ្យបានថា $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + ...+(-1)^n\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}$

32. ក.គណនាអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 (x+1)^n.dx$

ខ.ទាញឱ្យបានថា $\frac{1}{n+1}C_n^0 + \frac{1}{n}C_n^1 + \frac{1}{n-1}C_n^2 + ...+C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

33. ក.គណនាអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x(1+x^2)^n.dx$

ខ.ទាញឱ្យបានថា $\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + ...+\frac{1}{2n+2}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{2n+2}$

34. ក.គណនាអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n.dx$

ខ.ទាញឱ្យបានថា

$$C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + ... + (-1)^n \frac{1}{2n+1}C_n^n = \frac{1\times 3\times 5\times .....\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times ....\times 2n}$$

35. ក.គណនាអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^{2n}.dx$

ខ.ទាញរកផលបូក

$$S_n = C_{2n}^0 - \frac{1}{3}C_{2n}^1 + \frac{1}{5}C_{2n}^2 - \frac{1}{7}C_{2n}^3 + ... + (-1)^n \frac{1}{2n+1}C_{2n}^n + ... + \frac{1}{4n+1}C_{2n}^{2n}$$

ប្រូបាប៊ីលីតេ

ប្រូបាប៊ីលីតេ មានសារៈសំខាន់ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃរបស់យើង ដែលយើងប្រើប្រាស់វាសំរាប់វាស់កំរិតនៃភាពមិនទៀងទាត់ ។ កាលណាយើងគ្រោងធ្វើអ្វីមួយកាលណាអ្នកឧតុនិយមទស្សន៍ទាយអាកាសធាតុឬ ក្រុមហ៊ុនធានារ៉ាប់រងធ្វើគោលនយោបាយរបស់ក្រុមហ៊ុន ចាំបាច់ត្រូវប្រើ ប្រូបាប៊ីលីតេ ដើម្បីធ្វើសេចក្តីសំរេចចិត្ត ឬធ្វើ ការជ្រើសរើស ។

១-ព្រឹត្តិការណ៍-លំហសំណាក :

ក.វិញ្ញាសា :

វិញ្ញាសា គឺជាការពិសោធន៍មួយដែល :

-អាចអោយគេដឹង នូវសំណុំលទ្ធផលដែលបានកើតឡើង

-ពុំអាចដឹងប្រាកដថា លទ្ធផលណាដែលនឹងកើតមានឡើង

-ការពិសោធន៍ អាចសារឡើងវិញ ជាច្រើនដង ក្នុងលក្ខខណ្ឌដូចគ្នា ។

ខ.សកល ឬលំហសំណាក :

សំនុំនៃលទ្ធផលទាំងអស់ដែលអាចមាន របស់វិញ្ញាសាមួយ ហៅថា សកល

ដែលគេតាងដោយ $S \text{ or } \Omega \text{ or } U$ ។

គ.ព្រឹត្តិការណ៍ : ជាសំណុំរង របស់សកល ឬលំហសំណាក ។

ឧទាហរណ៍ :

បើយើងបោះកាក់ដែលមានមុខ H និងខ្នង T ចំនួនមួយដងនោះគេអាចបានលទ្ធផល

H ឬT ។

-សំនុំ $\{H, T\}$ ហៅថា លំហសំណាក តាងដោយ $S = \{H, T\}$ ។

-បើគេប្រាថ្នាបោះបានមុខ H នោះសំណុំ $\{H\}$ ហៅថាព្រឹត្តិការណ៍ តាងដោយ $A = \{H\}$ ។

-ចំនួនធាតុនៃលំហសំណាក ហៅថាចំនួនករណីអាច គេតាងដោយ $n(S) = 2$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

-ចំនួនធាតុនៃព្រឹត្តិការណ៍ ហៅថាចំនួនករណីស្រប គេតាងដោយ $n(A)=1$ ។

២.រូបមន្តគោលនៃប្រូបាប :

នៅក្នុងពិសោធន៍មួយ ដែលមានលំហសំណាក S ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ A កើតឡើងកំនត់ដោយ :

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}}$$ ។

សំគាល់ : ដោយ $A \subseteq S$ នាំអោយ $0 \le P(A) \le 1$ ។

ឧទាហរណ៍ :

ក្នុងថង់មួយមានឃ្លី 10 គ្រាប់ ឃ្លីក្រហម 4 និង ឃ្លីខ្មៅ 6 ។

គេចាប់យកឃ្លី 3 គ្រាប់ដោយចៃដន្យ ។

រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយបាន ឃ្លីដែលមានពណ៌ក្រហមទាំងបី ?

ដំណោះស្រាយ :

រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយបាន ឃ្លីដែលមានពណ៌ក្រហមទាំងបី :

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ ចាប់យកឃ្លី 3 បានពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់

តាមរូបមន្ត : $$P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

-ចំនួនករណីអាច :

ចាប់យកឃ្លី 3 ក្នុងចំណោមឃ្លី 10 វាជាបន្សំ 3 ក្នុង 10

គេបាន : $$n(S)=C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!.(10-3)!}=\frac{7!.8.9.10}{1.2.3.7!}=120$$

-ចំនួនករណីស្រប :

ចាប់ឃ្លី 3 បានពណ៌ក្រហមក្នុងចំណោមឃ្លីក្រហម 4 វាជាបន្សំ 3 ក្នុង 4

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

គេបាន : $n(A)=C_4^3=\dfrac{4!}{3!.(4-3)!}=4$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{3}{120}=\dfrac{1}{40}=0.025=2.5\%$ ។

៧.រូបមន្តគណនាប្រូបាប៊ីលីតេ :

ក-រូបមន្ត ប្រូបាប៊ីលីតេនៃប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍ពីរ

✳ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនចុះសំរុងគ្នានោះគេបាន :

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$$

✳ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរសាមញ្ញនោះគេបាន :

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

ខ-រូបមន្ត ប្រូបាប៊ីលីតេនៃប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍បី :

✳ បើ A ,B និង C ជាព្រឹត្តិការណ៍បីមិនចុះសំរុងគ្នាពីៗនោះគេបាន :

$$\boxed{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)}$$

✳ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍បីសាមញ្ញនោះគេបាន :

$$\boxed{P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)}$$

គ-ជាទូទៅ :

✳ បើ $A_1,A_2,A_3,......,A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនចុះសំរុងគ្នាពីៗនោះគេបាន :

$$\boxed{P(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)}$$ ។

ឃ-រូបមន្តប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយគ្នា :

បើ A និង $\overline{A}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរផ្ទុយគ្នានោះគេបាន :

$$\boxed{P(A)+P(\overline{A})=1 \Leftrightarrow P(\overline{A})=1-P(A)}$$ ។

ឧទាហរណ៍ :ប្រូបាប៊ីលីតេដែលថ្ងៃស្អែកនឹងភ្លៀងនៅផ្សារបឹងឈូកមាន 0.525 ។
រកប្រូបាប៊ីលីតេដែលថ្ងៃស្អែកមិនភ្លៀងនៅផ្សារបឹងឈូក ?

solution : $P(\overline{A})=1-0.525=0.475$ ។

ង-រូបមន្តប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខ័ណ្ឌ :

✳ ប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ដោយដឹងថា មានព្រឹត្តិការណ៍ B បានកើតឡើងរួចហើយ ហៅថា ប្រូបាបមានលក្ខខ័ណ្ឌ ដែលគេតាងដោយ $P(A/B)$ អានថាប្រូបាបនៃ A ដោយបានដឹង B ។

ដូចនេះ ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ដោយ $P(B)\neq 0$ គេមានរូបមន្ត :

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$ ឬគេអាចទាញ $$\boxed{P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)}$$ ។

ឧទាហរណ៍ :គេហូតបៀរ 2 សន្លឹកពីក្នុងហ៊ូដែលមានបៀរ 52 សន្លឹក ។
រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយបៀរសន្លឹកទិមួយជាអាត់ និង សន្លឹកទីពីរជាក្រមុំ ?

solution : $P(A\cap B)=\frac{4}{52}\times\frac{4}{51}=0.006$ ។

ច-រូបមន្តប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនទាក់ទងគ្នា :

✳ ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ដែលអាស្រយ័នឹងគ្នាក្នុងវិធីដែលការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយមិនមានជាប់ពាក់ពន្ធ័នឹងការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀត យើងហៅថា ព្រឹត្តិការណ៍**មិនទាក់ទងគ្នា** ។

✳ បើ A និង B មិនទាក់ទងគ្នាសមមូល : $\begin{cases} P(A/B) = P(A) \\ P(B/A) = P(B) \end{cases}$

✳ បើ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ មិនទាក់ទងគ្នានោះគេបាន :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេហូតបៀរមួយសន្លឹកពីរដង (ហូតរួចដាក់វិញ) ។

រកប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីអោយបៀរទាំងពីរសុទ្ធតែជាសន្លឹកអាត់ ?

solution : $P(A \cap B) = \frac{C_4^1}{C_{52}^1} \times \frac{C_4^1}{C_{52}^1} = 0.307$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរសាមញ្ញ និងមិនទាក់ទងគ្នាដែល :

$P(A \cup B) = 0.725$ និង $P(A \cap B) = 0.225$ ។ ចូរគណនា P(A) និង P(B) ?

តាមរូបមន្ត $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

គេបាន $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) = 0.725 + 0.225 = 0.950$

ដោយ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរមិនទាក់ទងគ្នានោះ $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0.225$

គេបានប្រពន្ធ័ $\begin{cases} P(A) + P(B) = 0.950 \\ P(A).P(B) = 0.225 \end{cases}$

$P(A)$ និង $P(B)$ ជាឫសសមីការ $X^2 - 0.95X + 0.225 = 0$ មានឫស $\left[\begin{array}{l} X_1 = 0.45 \\ X_2 = 0.50 \end{array}\right.$

ដូចនេះ $P(A) = 0.45$, $P(B) = 0.50$ ឬ $P(A) = 0.50$, $P(B) = 0.45$ ។

✳ ជាទូទៅបើ $A_1, A_2, ..., A_n$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ មិនទាក់ទងគ្នាគេបាន :

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times ... \times P(A_n)}$$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យ A,B,C ជាព្រឹត្តិការណ៍បីសាមញ្ញ និងមិនទាក់ទងគ្នាពីរៗដែល :

$P(A) = 0.40$, $P(B) = 0.30$, $P(C) = 0.25$ ។

ចូររក $P(A \cup B \cup C)$?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

តាមរូបមន្តគេបាន :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

ដោយ A,B,C ជាព្រឹត្តិការណ៍បីមិនទាក់ទងគ្នាពីរៗ នោះគេបាន :

$$P(A\cup B\cup C)=0.4+0.3+0.25-0.4\times0.3-0.4\times0.25-0.3\times0.25+0.3\times0.4\times0.25$$

$$=0.95-0.12-0.1-0.075+0.03=0.685$$ ។

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

នៅក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សប្រុស 18 នាក់ និងសិស្សស្រី 22 នាក់ ។

គេហៅឈ្មោះសិស្ស 4 នាក់ដោយចៃដន្យ ។

ក-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេហៅបានសិស្សស្រីទាំង 4 នាក់ ។

ខ-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេហៅបានសិស្សស្រីតែម្នាក់គត់ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេហៅបានសិស្សស្រីទាំង 4 នាក់

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ហៅសិស្ស 4នាក់បានសិស្សស្រីទាំងបួននាក់

គេបាន $P(A)=\dfrac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

-ចំនួនករណីអាច :

ហៅសិស្ស 4 នាក់ក្នុងចំនោមសិស្ស 40 នាក់ ជាបន្សំ 4 ក្នុងចំណោម 40

នាំអោយ $n(S)=C_{40}^{4}=\dfrac{40!}{4!.(40-4)!}=\dfrac{36!.37.38.39.40}{24.36!}=91390$

-ចំនួនករណីស្រប :

ហៅបានសិស្សស្រីទាំង 4នាក់ក្នុងចំណោមសិស្សស្រីទាំងអស់ 22 នាក់ ជាបន្សំ 4 ក្នុង 22

នាំអោយ $n(A)=C_{22}^{4}=\dfrac{22!}{4!.(22-4)!}=\dfrac{18!.19.20.21.22}{24.18!}=7315$

គេបាន $P(A)=\dfrac{7315}{91390}=0{,}08004$ ។

ខ-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេហៅបានសិស្សស្រីតែម្នាក់គត់

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ហៅសិស្ស 4នាក់បានសិស្សស្រីតែម្នាក់គត់

គេបាន $P(A)=\dfrac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

-ចំនួនករណីអាច : $n(S)=C_{40}^{4}=91390$

-ចំនួករណីស្រប :

ហៅបានសិស្សស្រីតែម្នាក់គត់ក្នុងចំណោមសិស្សស្រី 22នាក់ គឺជាបន្សំ 1 ក្នុង 22 គឺ

$n_1=C_{22}^{1}=22$

នៅសល់ 3នាក់ទៀតជាសិស្សប្រុស ជាបន្សំ 3 ក្នុងចំណោម 18 គឺ

$n_2=C_{18}^{3}=\dfrac{18!}{3!.15!}=\dfrac{16.17.18}{6}=816$

នាំអោយចំនួនករណីស្របគឺ $n(A)=n_1\times n_2=22\times 816=17952$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{17952}{91390}=0{,}1964$ ។

លំហាត់ទី២

គេហូតបៀ 3 សន្លឹកដោយចៃដន្យពីក្នុងហ៊ូដែលមានបៀ 52 សន្លឹក ។

ក-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានអាត់ទាំងបីសន្លឹក ។

ខ-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានអាត់ពីរសន្លឹក នឹងក្រមុំមួយសន្លឹក ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានអាត់

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ហូតបៀ 3សន្លឹកបានអាត់ទាំ 3 សន្លឹក

គេបាន $P(A)=\dfrac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

-ចំនួនករណីអាច :

ហូតបៀ 3 សន្លឹកក្នុងចំណោមបៀ 52 សន្លឹក ជាបន្សំ 3 ក្នុងចំណោម 52

នាំអោយ $n(S)=C_{52}^{3}=\dfrac{52!}{3!.(52-3)!}=\dfrac{49!.50.51.52}{6.49!}=22100$

-ចំនួនករណីស្រប :

ហូតបៀ 3សន្លឹកបានអាត់ 3 ក្នុងចំណោមអាត់ 4សន្លឹក គឺជាបន្សំ 3 ក្នុង 4 គឺ $n(A)=C_{4}^{3}=4$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{4}{22100}=0,000180995$

ខ-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានអាត់ពីរសន្លឹក នឹងក្រមុំមួយសន្លឹក

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ហូតបៀបីសន្លឹកបានអាត់ពីរសន្លឹក នឹងក្រមុំមួយសន្លឹក

គេបាន $P(A)=\dfrac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

-ចំនួនករណីអាច $n(S)=22100$

-ចំនួនករណីស្រប :

បានអាត់ 2 សន្លឹកក្នុងចំណោមអាត់ 4 សន្លឹក គឺ $n_1=C_4^2=\dfrac{4!}{2!.2!}=6$

បានក្រមុំ 1 សន្លឹកក្នុងចំណោមក្រមុំ 4សន្លឹក គឺ $n_2=C_4^1=4$

នាំអោយចំនួនករណីស្រប $n(A)=6.4=24$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{24}{22100}=0,001085972$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់ទី៣

ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហម 8 គ្រាប់ និង ឃ្លីពណ៌ខ្មៅ 12 គ្រាប់ ។

គេចាប់យកឃ្លីពីក្នុងថង់ 4 គ្រាប់ដោយចៃដន្យ ។

ក-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានឃ្លីពណ៌ក្រហម 2គ្រាប់ ។

ខ-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានឃ្លីពណ៌ខ្មៅសុទ្ធ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានឃ្លីពណ៌ក្រហម 2គ្រាប់

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកឃ្លី 4 គ្រាប់ បានឃ្លីពណ៌ក្រហម 2 គ្រាប់

គេបាន $P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}$

-ចំនួនករណីអាច :

ចាប់យកឃ្លី 4 គ្រាប់ក្នុងចំណោមឃ្លី 20 គ្រាប់ ជាបន្សំ 4 ក្នុង 20 ។

គេបាន $n(S)=C_{20}^{4}=\frac{20!}{4!.16!}=4845$

-ចំនួនករណីស្រប :

ចាប់ឃ្លី 4 គ្រាប់ បានឃ្លីមានពណ៌ក្រហម 2 គ្រាប់ក្នុងចំណោមឃ្លីពណ៌ក្រហម 8 គឺ

$C_{8}^{2}=\frac{8!}{2!.6!}=28$

នៅសល់ឃ្លី 2 គ្រាប់ ជាឃ្លីពណ៌ខ្មៅក្នុងចំណោមឃ្លីខ្មៅ 12 គឺ $C_{12}^{2}=\frac{12!}{2!.10!}=66$

នាំអោយចំនួនករណីស្រប $n(A)=28.66=1848$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{1848}{4845}=0,381424$ ។

ខ-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានឃ្លីពណ៌ខ្មៅសុទ្ធ :

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកឃ្លី 4 គ្រាប់ បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅសុទ្ធ

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

គេបាន $P(A)=\dfrac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

-ចំនួនករណីអាច $n(S)=C_{20}^{4}=4845$

-ចំនួនករណីស្រប

ចាប់យកឃ្លី 4 គ្រាប់ បានឃ្លីខ្មៅសុទ្ធក្នុងចំណោមឃ្លីខ្មៅ 12 គ្រាប់គឺ

$$n(A)=C_{12}^{4}=\frac{12!}{4!.8!}=495$$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{495}{4845}=0,10216$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់ប្រូបាប៊ីលីតេ

1. នៅក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្ស 25 នាក់ សិស្សប្រុសមាន 14 នាក់ និងសិស្សស្រីមាន 11 នាក់ ។គេហៅឈ្មោះសិស្សពីរនាក់ដោយចៃដន្យ ។

ក-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេហៅបានសិស្សជាសិស្សស្រីទាំងពីរនាក់ ។

ខ- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេហៅបានសិស្សស្រីម្នាក់ និង សិស្សប្រុសម្នាក់ ។

2. គេហូតយកបៀ 2 សន្លឹក ពីក្នុងហ៊ូដែលមានបៀ 52 សន្លឹកដោយចៃដន្យ ។

គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានបៀជាសន្លឹកអាត់ទាំងពីរ ។

3. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ខៀវ 3គ្រាប់ ឃ្លីពណ៌ក្រហម 5គ្រាប់ និង ឃ្លីពណ៌ខ្មៅ 4 គ្រាប់ ។

គេលូកចាប់យកឃ្លី 2 គ្រាប់ពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ ។

ក- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានឃ្លីមានពណ៌ខៀវសុទ្ធ ។

ខ- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានឃ្លីមានពណ៌ក្រហមសុទ្ធ ។

គ- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានឃ្លីមានពណ៌ខ្មៅសុទ្ធ ។

4. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល 10គ្រាប់ គឺប៊ូលពណ៌ខៀវ 6 គ្រាប់ និងប៊ូលពណ៌ក្រហម 4 គ្រាប់ ។

គេចាប់យកប៊ូល 3គ្រាប់ពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ ។

ក- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានប៊ូលមានពណ៌ខៀវ 2គ្រាប់ ។

ខ- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានប៊ូលមានពណ៌ខៀវយ៉ាងតិច 2គ្រាប់ ។

គ- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានប៊ូលមានពណ៌ខៀវយ៉ាងច្រើន 2គ្រាប់ ។

5. នៅក្នុងថ្នាក់រៀនមួយមានសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា 14នាក់ សិស្សពូកែរូបវិទ្យា 8 នាក់ និងសិស្សពូកែខ្មែរ 18នាក់ ។ គេហៅសិស្ស 4នាក់ដោយចៃដន្យ ។

ក- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា 2 នាក់ ។

ខ-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា 2នាក់យ៉ាងតិច ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

គ-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានសិស្សពូកែរូបវិទ្យា 3នាក់ និងសិស្សពូកែខ្មែរ1នាក់ ។

6. ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ស 6 គ្រាប់ និង ឃ្លីពណ៌ខ្មៅ 8 គ្រាប់ ។
   គេចាប់យកឃ្លី 2 គ្រាប់ដោយចៃដន្យ ។
   គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានឃ្លីមានពណ៌ខុសគ្នា ។

7. គេហូតយកបៀ 3 សន្លឹក ពីក្នុងហ៊ូដែលមានបៀ 52 សន្លឹកដោយចៃដន្យ ។
   ក-គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានបៀជាសន្លឹកអាត់ 2 សន្លឹក ។
   ខ- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានបៀជាសន្លឹកអាត់ 1 សន្លឹក និងសន្លឹកក្រមុំ 2សន្លឹក ។

8. គេហូតយកបៀ 5 សន្លឹក ពីក្នុងហ៊ូដែលមានបៀ 52 សន្លឹកដោយចៃដន្យ ។
   ក- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានបៀជាសន្លឹកអាត់ 2 សន្លឹក ឬ 3 សន្លឹក ។
   ខ- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេបានបៀជាសន្លឹកអាត់ 2សន្លឹក យ៉ាងច្រើន ។

9. ក្នុងទូមួយមានអាវ 8 គឺអាវពណ៌ស 4 អាវពណ៌ខៀវ 3 អាវពណ៌ក្រហម 1 ។
   គេយកអាវមួយចេញពីក្នុងទូមកពាក់ដោយចៃដន្យ ។
   គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យគេយកបានអាវពណ៌ ខៀវ ឬ ពណ៌ ស ។

10. កាក់មួយត្រូវបានគេបោះបីដងដោយចៃដន្យ ។
   ក- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យកាក់ចេញមុខផ្កា 2 ដង ។
   ខ- គណនាប្រូបាប៊ីលីតេដើម្បីឱ្យកាក់មិនចេញមុខផ្កា ។

11. គេឱ្យ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរសាមញ្ញ និងមិនទាក់ទងគ្នាដែល :
   $P(A) = 0.65$ និង $P(B) = 0.25$ ។ ចូរគណនា $P(A \cup B)$?

12. គេឱ្យ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ពីរសាមញ្ញ និងមិនទាក់ទងគ្នាដែល :
   $P(A \cup B) = 0.68$ និង $P(A \cap B) = 0.12$ ។ ចូរគណនា $P(A)$ និង $P(B)$?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ម៉ាទ្រីស
(MATRICES)

1. វ៉ិចទ័រ :

និយមន័យ : សំណុំមួយមាន n ចំនួនពិតរៀបតាមលំដាប់មួយកំនត់ $a_1, a_2, ..., a_n$ ហៅថាវ៉ិចទ័រ n ឌីម៉ង់ស្យុងដែលគេកំនត់សរសេរ :

$$A = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \text{ ឬ } A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$$ ដែល a_i ហៅថាកុំប៉ូហ្សង់ទី i ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យ $A = (25, 35, 45, 75, 125, 225)$ ជាវ៉ិចទ័រមាន 6 ឌីម៉ង់ស្យុង ។

2. និយមន័យម៉ាទ្រីស

តារាងមួយដែលមាន m វ៉ិចទ័រ និង n ឌីម៉ង់ស្យុងកំនត់សរសេរក្នុងវង់ក្រចកជារាង :

$$A = (a_{ij})_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ..... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ ហៅថាម៉ទ្រីសលំដាប់ m.n ។

m: ហៅថាចំនួនលីញ , n: ហៅថាចំនួនកូឡោន និង a_{ij} ជាធាតុនៅលើលីញទី i កូឡោនទី j ។

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យ $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ 5×3 ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

3. ប្រភេទនៃម៉ាទ្រីស

a / Zero matrix :

ម៉ាទ្រីសទាំងអស់ដែលមានធាតុទាំងអស់ស្មើសូន្យ ហៅថាម៉ាទ្រីសសូន្យ តាងដោយ O_{mn} ។

ឧទាហរណ៍ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសសូន្យលំដាប់ 5×4 ។

b / Square matrix :

ម៉ាទ្រីសមួយដែលមានចំនួនលីញស្មើនឹងចំនួនកូឡោនហៅថា **ម៉ាទ្រីសការេ**

ដែលគេកំនត់សរសេរ : $A = (a_{ij})_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$

ឧទាហរណ៍ $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសការេ ។

c / Triangular matrix :

ម៉ាទ្រីសការេមួយដែលមានធាតុ $a_{ij} = 0 , \forall i > j \text{ or } i < j$ ហៅថា **ម៉ាទ្រីសត្រីកោណ**

ដែលគេកំនត់សរសេរ : $A = (a_{ij})_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & 0 & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$

ឧទាហរណ៍ $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសត្រីកោណ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

d / Diagonal matrix :

ម៉ាទ្រីសការេមួយដែលមានធាតុ $a_{ij} = 0 \ , \forall\, i \neq j$ ហៅថា **ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង**

ដែលគេកំនត់សរសេរ : $A = (a_{ij})_{nn} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ..... & 0 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូង ។

e / Indentity matrix :

ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងដែលមានធាតុ $a_{ii} = 0$ ហៅថា **ម៉ាទ្រីសឯកតា** ដែលគេកំនត់សរសេរ :

$$I_n = (a_{ij})_{nn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ..... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ..... & 0 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & 0 & ..... & 1 \end{pmatrix} ។$$

ឧទាហរណ៍ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ហៅថាម៉ាទ្រីសឯកតា ។

f / Transpose of matrix :

ម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីស $A = (a_{ij})_{mn}$ គឺជាម៉ាទ្រីសដែលតាងដោយ $A^T = (a_{ji})_{nm}$ ។

ឧទាហរណ៍ បើ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ នាំឱ្យ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

g / Equality of matrix :

ម៉ាទ្រីស $A=(a_{ij})_{mn}$ និង $B=(b_{ij})_{mn}$ ជាម៉ាទ្រីសពីរស្មើគ្នាកាលណាធាតុ $a_{ij}=b_{ij}$ ។

គេឱ្យម៉ាទ្រីសពីរ $A=\begin{pmatrix} 3a+1 & 4b+5 & 2c+3 \\ 2x-3 & y+2 & 3z-2 \end{pmatrix}$ និង $B=\begin{pmatrix} 7 & 9 & 9 \\ 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

កំនត់ចំនួនពិត a,b,c,x,y និង z ដើម្បីឱ្យ $A=B$

គេបាន $A=B$ កាលណា $\begin{cases} 3a+1=7 \\ 4b+5=9 \\ 2c+3=9 \\ 2x-3=5 \\ y+2=8 \\ 3z-2=10 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a=2, b=1, c=3, x=4, y=6, z=4$

4. ប្រមាណវិធីនៃម៉ាទ្រីស

a / Addition of matrices :

-ម៉ាទ្រីសពីរអាចបូក ឬ ដកគ្នាបាន កាលណាវាជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ដូចគ្នា ។

-សន្មតថាគេមានម៉ាទ្រីសពីរ $A=(a_{ij})_{mn}$ និង $B=(b_{ij})_{mn}$

គេបានរូបមន្តផលបូក $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{mn}$ និងផលដក $A-B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{mn}$

ឧទាហរណ៍ គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix} 17 & 11 & 95 \\ 34 & 25 & 57 \\ 68 & 71 & 75 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 23 & 10 & 83 \\ 21 & 14 & 35 \\ 15 & 50 & 46 \end{pmatrix}$

គេបាន $A+B=\begin{pmatrix} 17+23 & 11+10 & 95+83 \\ 34+21 & 25+14 & 57+35 \\ 68+15 & 71+50 & 75+46 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40 & 21 & 188 \\ 55 & 36 & 92 \\ 83 & 121 & 121 \end{pmatrix}$

និង $A-B=\begin{pmatrix} 17-23 & 11-10 & 95-83 \\ 34-21 & 25-14 & 57-35 \\ 68-15 & 71-50 & 75-46 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 12 \\ 13 & 11 & 22 \\ 53 & 21 & 29 \end{pmatrix}$

b / Scalair multiplication;

ផលគុណ ម៉ាទ្រីស $A=(a_{ij})_{mn}$ នឹងចំនួនថេរ λ គឺជាម៉ាទ្រីសកំនត់ដោយ $\lambda.A=(\lambda.a_{ij})$

ឧទាហរណ៍ : បើ $A=\begin{pmatrix}5&3&4\\4&9&7\\7&4&6\end{pmatrix}$ គេបាន $7A=\begin{pmatrix}35&21&28\\28&63&49\\49&28&42\end{pmatrix}$ ។

c / Multiplication of matrices:

ម៉ាទ្រីសពីរអាចគុណគ្នាបានលុះត្រាតែម៉ាទ្រីទីមួយមានចំនួនកូឡោនស្មើនឹងចំនួនលីញនៃ

ម៉ាទ្រីសទីពីរ ។ ឧបមាថាគេមានម៉ាទ្រីសពីរ : $A=(a_{ij})_{mn}$ និង $B=(b_{ij})_{np}$

ផលគុណម៉ាទ្រីស A និង B គឺជាម៉ាទ្រីស C កំនត់ដោយ $C=A.B=(c_{ij})_{mp}$

ដែល $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}.b_{kj})=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+.....+a_{in}b_{nj}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}4&2&9\\1&5&4\\2&7&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\3&5\end{pmatrix}$

គេបាន $C=A.B=\begin{pmatrix}4&2&9\\1&5&4\\2&7&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4.1+2.2+9.3 & 4.3++2.4+9.5\\1.1+5.2+4.3 & 1.3+5.4+4.5\\2.1+7.2+3.3 & 2.3+7.4+3.5\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $C=\begin{pmatrix}35&65\\23&43\\25&49\end{pmatrix}$ ។

d / Powers of matrices:

បើ $A=(a_{ij})_{nn}$ ជាម៉ាទ្រីសការេនោះគេកំនត់ស្វ័យគុណនៃម៉ាទ្រីសដោយ :

1. $A^2=A.A$, $A^3=A^2.A$, $A^4=A^3.A$, ...,$A^p=A^{p-1}.A$, $p\in IN^*$,$P\geq 2$

2. $A^n.A^p=A^{n+p}$

3. $(A^n)^p=A^{np}$

4. $A^0=I_n$ ដែល I_n ជាម៉ាទ្រីសឯកតា ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ ចូរគណនា A^2 និង A^3

គេបាន $A^2=A.A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.2+3.4 & 2.3+3.5\\ 4.2+5.4 & 4.3+5.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 21\\ 28 & 37\end{pmatrix}$

និង $A^3=A^2.A=\begin{pmatrix}16 & 21\\ 28 & 37\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16.2+21.4 & 16.3+21.5\\ 28.2+37.4 & 28.3+37.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}116 & 153\\ 204 & 269\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $A^2=\begin{pmatrix}16 & 21\\ 28 & 37\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}116 & 153\\ 204 & 269\end{pmatrix}$ ។

e / Properties of matrix operations

បើ A,B,C ម៉ាទ្រីស និង α,β,μ ជាបីចំនួនពិតឬស្កាលែនោះគេមាន :

1. $A+B=B+A$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$
3. $\alpha(A+B+C)=\alpha A+\alpha B+\alpha C$
4. $(\alpha+\beta+\mu)A=\alpha A+\beta A+\mu A$
5. $O+A=A+O=A$
6. $A.(B.C)=(A.B).C$
7. $A.(B+C)=A.B+A.C$
8. $(A+B).C=A.C+B.C$
9. $A.B \neq B.A$
10. $A.I_n=I_n.A=A$

5. ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសការេ

a / Determinant of order 2×2

គេឱ្យម៉ាទ្រីសលំដាប់ 2×2 កំនត់ដោយ $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ ។

ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A កំនត់ដោយ : $|A|=\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$ ។

ឧទាហរណ៍ : គណនាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix}$?

គេបាន $|A|=\det(A)=\begin{vmatrix}7 & 5\\ 3 & 8\end{vmatrix}=7.8-3.5=56-15=41$

ដូចនេះ $|A|=\det(A)=41$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

b / Minors and Cofactors :

គេឱ្យម៉ាទ្រីសការេ $A=(a_{ij})_{nn}$ ។

☞ Minor នៃធាតុ a_{ij} ជាដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសដែលបន្ទាប់ពីលុបលីញទី i និងកូឡោនទី j ចេញ ដែលគេកំនត់តាង Minor នៃធាតុ a_{ij} ដោយ M_{ij} ។

☞ Cofactor នៃធាតុ a_{ij} កំនត់តាងដោយ $C_{ij}=(-1)^{i+j}.M_{ij}$ ។

ឧទាហរណ៍: គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ ចូរគណនាមីណរ័និងកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ a_{21} ?

គេបាន $M_{21}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}=8-24=-16$ និង $C_{21}=(-1)^{2+1}.16=16$ ។

c / Determinant of order 3×3

គេឱ្យម៉ាទ្រីសលំដាប់ 3×3 កំនត់ដោយ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីស A កំនត់ដោយ:

$$|A|=\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$$ ។

d / Determinant of order $n\times n$

គេឱ្យម៉ាទ្រីសការេ $A=\left(a_{ij}\right)_{nn}$ ។ ដេទែមីណង់នៃម៉ាទ្រីសនេះកំនត់តាងដោយ :

$$|A|=\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+a_{i3}C_{i3}+\dots\dots+a_{in}C_{in}=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}.C_{ik}\right)$$

$$|A|=\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+a_{i3}C_{i3}+\dots\dots+a_{in}C_{in}=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}.C_{ik}\right)$$

6. សមីការនៃម៉ាទ្រីស

a / Matix Cofactors :

ម៉ាទ្រីសកូហ្វាក់ទ័រនៃម៉ាទ្រីសការេ $A=\left(a_{ij}\right)_{nn}$ គឺជាម៉ាទ្រីសកំនត់ដោយ $C=\left(C_{ij}\right)_{nn}$ ដែល $C_{ij}=(-1)^{i+j}.M_{ij}$ ។

b / Adjoint Matix :

ម៉ាទ្រីស Adjoint នៃម៉ាទ្រីសការេ $A = (a_{ij})_{nn}$ គឺជាម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីសកូហ្វាក់ទ័រ នៃម៉ាទ្រីសការេ $A = (a_{ij})_{nn}$ ដែលគេកំនត់សរសេរ $Adj(A) = (C)^T$ ។

c / ម៉ាទ្រីសទោល :

ដែលហៅថាម៉ាទ្រីសទោលគឺជាម៉ាទ្រីសការេដែលមានដេទែមីណង់ស្មើសូន្យ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូរបង្ហាញថា $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសទោល ។

d / Invers of Matix :

បើ A មិនមែនជាម៉ាទ្រីសទោលនោះ ចំរាស់នៃម៉ាទ្រីសការេ $A = (a_{ij})_{nn}$ ជាម៉ាទ្រីសដែល តាងដោយ A^{-1} និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $A \,.\, A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$ ។

ឧទាហរណ៍ : គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ ។

ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាម៉ាទ្រីសច្រាស់ (Matrix inverses) នៃម៉ាទ្រីស A កំនត់ដោយ :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} .$$

e / រូបមន្តកំនត់រកម៉ាទ្រីសច្រាស់ :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times Adj(A)}$$

f / រូបមន្តរកម៉ាទ្រីសច្រាស់នៃម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2×2 :

បើគេមាន $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} . \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍ : ចូររកម៉ាទ្រីសច្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $A\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$?

g / សមីការម៉ាទ្រីស :

ឧបមាថាគេមានម៉ាទ្រីសបី A , B , X ដែល $\det(A) \neq 0$ ។

ទំនាក់ទំនង $A.X = B$ (ហៅថាសមីការម៉ាទ្រីស)

បើយើងគុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង A^{-1} គេបាន :

$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$ ដោយ $A^{-1}.A = I$ និង $I.X = I$ ដែល I ជាម៉ាទ្រីសឯកតា ។

ដូចនេះ $X = A^{-1}.B$ ។

7. ប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែ :

ក -និយមន័យ :

ប្រពន្ធ័មាន n សមីការលីនេអ៊ែមាន n អញ្ញាតដែលមានទម្រង់ជា :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3x}x_n = b_3 \\ ------------------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ហៅថាប្រពន្ធ័សមីការលីនេអ៊ែមាន n អញ្ញាត និង n សមីការ ។

ខ -ចម្លើយប្រព័ន្ធសមីការលីនេអ៊ែ :

បើសិនជាគេតាង $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ..... & a_{3n} \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ .... \\ x_4 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ..... \\ b_n \end{pmatrix}$

ប្រព័ន្ធសមីការ (S) អាចសរសេរក្រោមទម្រង់សមីការម៉ាទ្រីស $A.X = B$ ។

បើ $\det(A) \neq 0$ គេទាញបាន $X = A^{-1}.B$ ។

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}2&1&3&4&1\\1&3&1&0&2\\4&2&3&1&2\\0&1&4&3&1\\5&1&2&7&4\end{pmatrix}$

ក-ចូរបញ្ជាក់ប្រភេទ និង លំដាប់នៃម៉ាទ្រីស A ។

ខ-ចូរកំនត់តម្លៃនៃធាតុ a_{25} , a_{34} , a_{52} , a_{43} ។

គ-ចូរសរសេរធាតុទាំងអស់ដែលនៅលើអង្កត់ទ្រូងពិសេស ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ម៉ាទ្រីស A ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 5×5 ។

ខ-កំនត់តម្លៃនៃធាតុ :

គេបាន $a_{25}=2\,,\,a_{34}=1\,,\,a_{52}=1\,,\,a_{43}=4$ ។

គ-ធាតុនៅលើអង្កត់ទ្រូងពិសេសមាន :

$a_{11}=2\,,\,a_{22}=3\,,\,a_{33}=3\,,\,a_{44}=3\,,\,a_{55}=4$ ។

លំហាត់ទី២

ចូរកំនត់តម្លៃ $x\,,y\,,z,t$ ដើម្បីឱ្យ $\begin{pmatrix}e^x & \ln y\\ 2^z & \log_3 t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\8&2\end{pmatrix}$

គេបាន $\begin{cases}e^x=2\\ \ln y=3\\ 2^z=8\\ \log_3 t=2\end{cases}\Rightarrow\ x=\ln 2\,,\,y=e^3\,,\,z=3\,,\ t=9$ ។

លំហាត់ទី៣

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

កំនត់រកម៉ាទ្រីស X and Y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$X+Y=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix} \text{ and } 3X-2Y=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}$$

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $X+Y=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix} \Rightarrow 2X+2Y=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 14 & 18\end{pmatrix} \; (1)$

និង $3X-2Y=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix} \; (2)$ ។ បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន :

$$5X=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 14 & 18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 15\\ 20 & 25\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

ហើយ $Y=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}-X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ and $Y=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ ។

លំហាត់ទី៤

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័តាមម៉ាទ្រីស $\begin{cases}2x+3y=107\\ 3x+4y=148\end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}107\\ 148\end{pmatrix}$

ប្រពន្ធ័សមីការអាចសរសេរ $A.X=B \Rightarrow X=A^{-1}.B$

តាមរូបមន្ត $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}.\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

គេបាន $A^{-1}=\dfrac{1}{2.4-3.3}.\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

គេបាន $X=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}107\\ 148\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4(107)+3(148)\\ 3(107)-2(148)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\ 25\end{pmatrix}$ នាំឱ្យ $x=16, y=25$ ។

លំហាត់ទី៥

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធតាមម៉ាទ្រីស $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -7 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$

គេបាន $A.X = B \Rightarrow X = A^{-1}.B$

បន្ទាប់ពីគណនាគេបាន $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

គេទាញ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_4 = 4$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

1.គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&3&9&7\\4&1&2&8\\2&4&5&1\\5&7&6&4\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}2&7&3&9\\5&1&8&4\\1&2&7&1\\4&2&5&6\end{pmatrix}$

ក-ចូរគណនា $M=A+B$ and $N=A-B$ ។

ខ-ចូរគណនា $P=2A+3B$ and $Q=3A-2B$ ។

2. គេឱ្យម៉ាទ្រីសពីរ $A=\begin{pmatrix}2&5&7\\3&4&1\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&3&4\\3&5&4\end{pmatrix}$

ចូរគណនាផលគុណម៉ាទ្រីស A.B ។

3. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&3&5\\2&3&4\end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix}1&8&-3\\2&5&-1\\3&-2&4\end{pmatrix}$

ចូរគណនា A.B និង B.A ។

4. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}$ ។

ចូរគណនា A^2 , A^3 and A^4 ។

5. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}2&0&3\\-1&4&-2\\1&-3&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}14&-9&-12\\3&7&1\\-1&6&8\end{pmatrix}$

ចូរគណនាផលគុណ A.B ។

6. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\2&-3&-5\\-1&3&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1&2\\5&-3&-1\\-3&2&1\end{pmatrix}$

ចូរគណនាផលគុណ A.B ។ តើគេអាចសន្និដ្ឋានបានដូចម្ដេច?

7. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&2&1\\1&2&3\end{pmatrix}$

ក- កំណត់រកម៉ាទ្រីសត្រង់ស្ប៉ូ A^T នៃម៉ាទ្រីស A ។

ខ-គណនាផលគុណ $A.A^T$ និង $A^T.A$ ។

8. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&4&3\\3&2&0\\2&1&4\end{pmatrix}$

ក-កំណត់ម៉ាទ្រីសកូហ្វាក់ទ័រ នៃម៉ាទ្រីស A ។

ខ-ទាញរកម៉ាទ្រីស $Adj\,(A)$ ។

9.គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&4\\2&7&0\end{pmatrix}$

រកម៉ាទ្រីសច្រាស់របស់វា ។

10. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}0&2&7\\1&6&2\\2&3&4\end{pmatrix}$

ក-កំណត់ $Adj\,(A)$ ។

ខ-កំណត់ A^{-1} ។

11. កំនត់រកម៉ាទ្រីសច្រាស់នៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}2&0&1&3\\2&0&3&1\\0&2&2&1\\1&3&4&2\end{pmatrix}$ ។

12. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ and $C=\begin{pmatrix}14&13\\24&23\end{pmatrix}$

កំនត់ចំនួនពិត a , b ,c, d ដើម្បីឱ្យ $A.B=C$ ។

13. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

ចូរបង្ហាញថា A ជាម៉ាទ្រីសទោល រួចគណនា A^2 និង $(A^T)^2$ ។

14. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

ក-ចូរគណនា A^2, B^2 , $A.B$ រួចទាញរក $A^2 + 2A.B + B^2$ ។

ខ-គណនា $A + B$ and $(A + B)^2$

គ-ប្រៀបធៀប $(A + B)^2$ និង $A^2 + 2A.B + B^2$

15. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ចូរប្រៀបធៀប $A^2.A^3$, $A^3.A^2$, $A^4.A$ and $A.A^4$ ។

16. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

ក-ចូរគណនា A^2, A^3, A^4 ។

ខ-ទាញរក $A^n , \forall n \in IN^*$ ។

17. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in IR - \{ 0, -1, +1 \}$

ក-ចូរគណនា A^2, A^3, A^4 ។

ខ-ទាញរក $A^n , \forall n \in IN^*$ ។

គ-គណនាផលបូក $S = A + A^2 + A^3 + ... + A^n$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

18. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\0&4&1&5\\0&0&2&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

ក-គណនា A^2 , $(A^T)^2$, $A^2+2A.A^T+(A^T)^2$

ខ-ប្រៀបធៀប $(A+A^T)^2$ and $A^2+2A.A^T+(A^T)^2$

19-គេឱ្យ A and B ជាម៉ាទ្រីសការេមានលំដាប់ដូចគ្នា ។

បើ $A.B=B.A$ ចូរបង្ហាញថា $(A.B)^n=A^n.B^n$ ។

20. ក្នុងឱកាសបុណ្យចូលឆ្នាំខាងមុខនេះ សហគ្រាសមួយកន្លែងបានលក់បញ្ចុះថ្លៃ 20% នូវសម្លៀកបំពាក់របស់ខ្លួនមាន : អាវដៃខ្លី-អាវដៃវែង និង ខោជើងវែង ក្នុងសាខាបួន ។ តម្លៃទំនិញទាំងបីប្រភេទខាងលើក្នុងសាខាទាំងបួនមុនពេលលក់បញ្ចុះថ្លៃតាងដោយម៉ាទ្រីស:

$$M=\begin{pmatrix}7500&9000&30000\\6000&12000&25000\\8000&20000&27000\\6500&85000&15000\end{pmatrix}$$

ចូររកម៉ាទ្រីសតាងតម្លៃទំនិញក្នុងសាខាទាំងបួនក្នុងឱកាសបុណ្យចូលឆ្នាំ ។

21. គេមានម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-2&3&5\\1&-3&-5\end{pmatrix}$

ក-បង្ហាញថា $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-5&3&1\\3&-2&-1\end{pmatrix}$

ខ-ដោះស្រាប្រពន្ធ័តាមម៉ាទ្រីស $\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=2\\-2x_1+3x_2+5x_3=7\\x_1-3x_2-5x_3=-9\end{cases}$

22. ដោះស្រាយប្រពន្ធ័តាមម៉ាទ្រីស $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=20\\2x_1-3x_2+4x_3=11\\3x_1+5x_2-2x_3=13\end{cases}$

លំហាត់សារឡើងវិញ

លំហាត់ទី១

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៏ប្រាក់ចំនូលសរុប $TR(x) = -2x^3 + 3x^2 + 14700x$

ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលគេត្រូវលក់ ។

តើគេត្រូវលក់ផលិតផលនេះប៉ុន្មានឯកតាដើម្បីឱ្យបានចំនូលសរុបអតិបរមា ?

ចូរកំនត់ប្រាក់ចំនូលអតិបរមានោះ ?

ដំណោះស្រាយ

-គណនាដេរីវេទីមួយ $TR'(x) = -6x^2 + 6x + 14700$

-ដោះស្រាយសមីការ $TR'(x) = 0$ នាំឱ្យ $-6x^2 + 6x + 14700 = 0$

ឬ $-x^2 + x + 2450 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-1)(2450) = 99^2$

គេទាញឫស $x_1 = \dfrac{-1-99}{-2} = 50$, $x_2 = \dfrac{-1+99}{-2} = -49 < 0$ (មិនយក)

-គណនាដេរីវេទីពីរ $TR''(x) = -12x + 6$

ដោយ $TR''(50) = -12(50) + 6 < 0$ នាំឱ្យអនុគមន៏មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់

$x = 50$ មានន័យថាដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំនូលសរុបអតិបរមាគេត្រូវលក់ផលិតផលចំនួន 50 units

ហើយប្រាក់ចំនូលសរុបអតិបរមានោះគឺ $TR(50) = 492{,}500$ (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

លំហាត់ទី២

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៏ប្រាក់ចំនូលសរុប $TR(x) = 1800x + 80x^2$ និងអនុគមន៏

ប្រាក់ចំនាយសរុប $TC(x) = 1000 + 5x^2 + x^3$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផល ។

ចូរកំនត់បរិមាណផលិតផលដែលត្រូវលក់ដើម្បីឱ្យបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមា ?

ចូរកំនត់រកប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះ ?

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\text{Total Profit} = \text{Total Revenue} - \text{Total Cost}$

គេបាន $TP(x) = 1800x + 80x^2 - 1000 - 5x^2 - x^3 = -x^3 + 75x^2 + 1800x - 1000$

-គណនាដេរីវេទីមួយ $TP'(x) = -3x^2 + 150x + 1800$

-ដោះស្រាយសមីការ $TP'(x) = 0$ នាំឱ្យ $-3x^2 + 150x + 1800 = 0$

ឬ $-x^2 + 50x + 600 = 0$

គណនា $\Delta' = (25)^2 - (-1)(600) = 35^2$

គេទាញឫស $x_1 = \dfrac{-25-35}{-1} = 60$, $x_2 = \dfrac{-25+35}{-1} = -10 < 0$ (មិនយក)

-គណនាដេរីវេទីពីរ $TP''(x) = -6x + 150$ ។

ដោយ $TP''(60) = -6(60) + 150 < -210$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = 60$ ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំនេញអតិបរមាលុះត្រាតែគេលក់ផលិតផលចំនួន 60 units ។

ប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះគឺ $TP(60) = 161,000$ (ឯកតារូបិយវត្ថុ) ។

លំហាត់ទី៣

គេមានអនុគមន៍ Marginal Profit កំនត់ដោយ $MP(x) = -3x^2 + 150x + 1800$ ។

ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលបានលក់ ។ គេដឹងថាបើគេលក់ទំនិញ 60 ឯកតានោះ

គេនឹងបានប្រាក់ចំនេញ 161 000 ឯកតារូបិយវត្ថុ ។ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ Total Profit ?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ Total Profit ?

គេបាន $TP(x) = \int MP.dx = \int (-3x^2 + 150x + 1800).dx = -x^3 + 75x^2 + 1800x + k$

ដោយ $TP(60) = 161000$ នាំឱ្យ $K = -1000$ ។

ដូចនេះ $\boxed{TP(x) = -x^3 + 75x^2 + 1800x - 1000}$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់ទី៤ គេមានអនុគមន៍ Marginal Revenue មួយកំនត់ដោយ :

$MR(x) = -6x^2 + 6x + 14700$ ដែល x ជាបរិមាណផលិតផលដែលបានលក់ ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ Total Revenue បើគេដឹងថា កាលណាគេលក់ផលិតផល 50 ឯកតា គេទទួលបានប្រាក់ចំនូលសរុប 492 500 រៀល ។

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ Total Revenue

គេបាន $TR(x) = \int MR(x).dx = \int (-6x^2 + 6x + 14700).dx$

$$= -2x^3 + 3x^2 + 14700x + k$$

ដោយ $TR(50) = 492\,500 \quad \Rightarrow k = 0$ ។

ដូចនេះ $TR(x) = -2x^3 + 3x^2 + 14700x$

លំហាត់ទី៥

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ចំណាយសរុបមួយកំនត់ដោយ : $TC(x) = x^2 + 3x + 22500$

តើគេត្រូវផលិតប៉ុន្មានឯកតាដើម្បីឱ្យចំនាយមធ្យមក្នុង 1ឯកតា អប្បបរមា ?

ដំណោះស្រាយ

តាង $\overline{TC}(x)$ ជាអនុគមន៍ចំណាយមធ្យម ។

គេបាន $\overline{TC}(x) = \dfrac{TC(x)}{x} = x + 3 + \dfrac{22500}{x}$

-គណនាដេរីវេទីមួយ $\overline{TC}'(x) = 1 - \dfrac{22500}{x^2}$

-បើ $\overline{TC}' = 0$ នាំអោយ $1 - \dfrac{22500}{x^2} = 0$ នាំអោយ $x = \sqrt{22500} = 150$

-គណនាដេរីវេទីពីរ $\overline{TC}''(x) = \dfrac{5400}{x^3}$

ដោយគេមាន$\overline{TC}''(90) = \dfrac{5400}{150^3} > 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ TC(x) មានតម្លៃអប្បរមាត្រង់ $x = 150$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យចំណាយមធ្យមក្នុងមួយឯកតាអប្បបរមាគេត្រូវផលិតចំនួន 150 Units ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យអនុគមន៍ចំណាយក្នុងការថែទាំគ្រឿងយន្តមួយកំនត់ដោយ :

$r(t) = 500 - 6t - 10t^2 + t^3$ ដែល t ជារយះពេលគិតជាឆ្នាំ និង 400ជាចំណាយថេរ ។

ចូររកចំណាយក្នុងការថែទាំពីឆ្នាំទី 2 ទៅឆ្នាំទី6 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង E ជាចំណាយក្នុងការថែទាំពីឆ្នាំទី 4 ទៅឆ្នាំទី6

គេបាន $E = \int_2^6 (500 - 6t - 10t^2 + t^3).dt$

$$= \left[500t - 3t^2 - 3t^3 + \frac{1}{4}t^4 \right]_2^6$$

$$= \left[500(6) - 3(6)^2 - 3(6)^3 + \frac{1}{4}(6)^4\right] - \left[500(2) - 3(2)^2 - 3(2)^3 + \frac{1}{4}(2)^4\right]$$

$$= (3000 - 108 - 648 + 324) - (1000 - 12 - 24 + 4) = 2568 - 968 = 1,600$$

លំហាត់ទី៧

អនុគមន៍តម្រូវការរបស់ការផលិតមួយគឺ $f(q) = \frac{2500}{q+20}$ និងថ្លៃសមតាស្មើនឹង \$100 ។

ចូររកភាពលើសរបស់អ្នកប្រើប្រាស់ ?ដែល q ជាបរិមាណផលិតផល ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $p = \$100$ គេបាន $\frac{2500}{q+20} = 100 \Rightarrow q = 5$

ដូចនេះ $(p = \$100 , q = 5)$ ជាចំនុចសមតា

ហើយចំនូលត្រង់ចំនុចសមតាគឺ $TR_0 = 100(5) = \$500$ ។

$$C.S = \int_0^5 \frac{2500}{q+20}.dq - 500 = \left[2500 \ln|q+20|\right]_0^5 - 500 = 2500(\ln 25 - \ln 20) - 500$$

ដូចនេះភាពលើសនៃអ្នកប្រើប្រាស់គឺ $C.S = \$\,57.86$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់ទី៨

អនុគមន៍តម្រូវការរបស់ផលិតកម្មមួយគឺ $f(q)=\sqrt{50000-q^2}$ និងអនុគមន៍ផ្គត់ផ្គង់ $g(q)=2q$ ។

ចូររកភាពលើសនៃអ្នកផលិត ?

ដំណោះស្រាយ

-រកចំនុចសមតា :

$$\sqrt{50000-q^2}=2q$$

$$50000-q^2=4q^2$$

$$50000=5q^2 \Rightarrow q=\sqrt{\frac{50000}{5}}=100$$

គេបាន $q=100$ units នាំឱ្យ $p=2(100)=\$200$

ភាពលើសនៃអ្នកផលិតគឺ $P.S=100\times 200-\int_0^{100}(2q).dq$

$$=20000-\left[q^2\right]_0^{100}=20000-10000=\$10000$$

លំហាត់ទី៩

ក្រុមហ៊ុនមួយផលិតទំនិញពីរប្រភេទដែលមានអនុគមន៍ចំនួលសរុប និង ចំនាយសរុប :

-អនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលសរុប : $TR=f(x,y)=4xy+140y$

-អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុប : $TC=g(x,y)=x^2+5y^2+900$

ដែល x and y ជាបរិមាណផលិតផលនីមួយៗ ។

ចូរកំនត់ បរិមាណផលិផលប្រភេទនីមួយៗដែលត្រូវផលិតនិងលក់ដើម្បីឱ្យចំនេញអតិបរមា។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ បរិមាណផលិផលប្រភេទនីមួយៗដែលត្រូវផលិតនិងលក់ដើម្បីឱ្យចំនេញអតិបរមា

តាង $TP=F(x,y)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុប

គេបាន $TP=F(x,y)=TR(x,y)-TC(x,y)$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

$TP = F(x,y) = 4xy + 140y - x^2 - 5y^2 - 900$

-គណនា $TP'_x = 4y - 2x$, $TP'_y = 4x + 140 - 10y$

-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 4y - 2x = 0 \\ 4x + 140 - 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 140 , y = 70$

-គណនា $\Delta = ac - b^2$ ដោយ $\begin{cases} a = TP''_{xx} = -2 \\ b = TP''_{xy} = 4 \\ c = TP''_{yy} = -10 \end{cases}$

គេបាន $\Delta = 20 - 16 = 4 > 0$ and $a = -2 < 0$ នាំឱ្យអនុគមន៍មានអតិបរមាត្រង់ចំនុច

$x = 140 , y = 70$ ។

ដូចនេះគេត្រូវលក់ផលិតផលទីមួយចំនួន 140unites និងផលិតផលទីពីរ 70 unites ។

ប្រាក់ចំនេញអតិបរមានោះគឺ $TP_{max} = F(140,70) = \$ 4000$ ។

លំហាត់ទី១០

គេតាង $TC = f(x,y)$ អនុគមន៍ចំនាយសរុបនៃពីរផលិតផល ។

គេដឹងថាចំនាយម៉ាជីណលធៀបនឹង x គឺ $\frac{\partial TC}{\partial x} = 2x + 8y$

និង ចំនាយម៉ាជីណលធៀបនឹង y គឺ $\frac{\partial TC}{\partial x} = 8x + 3y^2$ ហើយចំណាយថេរ \$50 ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ចំណាយសរុប $TC = f(x,y)$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ចំណាយសរុប $TC = f(x,y)$

គេមាន $\frac{\partial TC}{\partial x} = 2x + 8y$ នាំឱ្យ $TC = \int (2x + 8y).dx = x^2 + 8xy + \varphi(y)$

គេបាន $TC'_y = \frac{\partial TC}{\partial y} = 8x + \varphi'(y) = 8x + 3y^2$ គេទាញ $\varphi(y) = \int 3y^2.dy = y^3 + k$

នាំឱ្យ $TC = x^2 + 8xy + y^3 + k$ ដោយចំណាយថេរ \$50 នាំឱ្យ $k = 50$ ។

ដូចនេះ $TC = f(x,y) = x^2 + 8xy + y^3 + 50$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់ទី១១

គេតាង $TP = f(x,y)$ អនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុបនៃពីរផលិតផល ។

គេដឹងថាចំនាយម៉ាជីណាលធៀបនឹង x គឺ $\frac{\partial TP}{\partial x} = 20 - 2x$

និង ចំនាយម៉ាជីណាលធៀបនឹង y គឺ $\frac{\partial TP}{\partial x} = 70 - 2y$ ។

បើគេលក់ផលិតផលទីមួយចំនួន 10 ឯកតា និងផលិតផលទីពីរ 35 ឯកតានោះគេទទួលបាន ប្រាក់ចំនេញអតិបរមា $\$1325$ ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុប $TP = f(x,y)$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុប $TP = f(x,y)$

គេមាន $\frac{\partial TP}{\partial x} = 20 - 2x \Rightarrow TP = \int (20-2x).dx = 20x - x^2 + \varphi(y)$

គេបាន $TP'_y = \frac{\partial TP}{\partial y} = \varphi'(y) = 70 - 2y$ នាំឱ្យ $\varphi(y) = \int (70-2y).dy = 70y - y^2 + k$

គេទាញ $TP = f(x,y) = 20x - x^2 + 70y - y^2 + k = 20x + 70y - x^2 - y^2 + k$

ដោយ $TP = f(10, 35) = 1325 \Rightarrow k = 0$ ។

ដូចនេះ $TP = f(x,y) = 20x + 70y - x^2 - y^2$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឧបមាថា $Z = f(x,y)$ ជាអនុគមន៍ ចំនួនសត្វល្អិតដែលត្រូវងាប់ដោយថ្នាំពីរប្រភេទ ដោយ x ជាចំណុះថ្នាំប្រភេទទីមួយ និង y ជាចំណុះថ្នាំប្រភេទទីពីរ (x , y គិតជាលីត) ។

គេដឹងថាឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុប $dZ = 65e^{-0.01x}.dx + 70e^{-0.02y}.dy$ និង $Z = f(0,0) = 9998$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $Z = f(x,y)$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ $Z = f(x,y)$

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

គេមាន $dZ = 65e^{-0.01x}.dx + 70e^{-0.02y}.dy$

តាមទំនាក់ទំនងនេះគេទាញ $\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = 65e^{-0.01x} \\ \dfrac{\partial Z}{\partial y} = 70e^{-0.02y} \end{cases}$

គេបាន $Z = \int 65e^{-0.01x}.dx = -6500e^{-0.01x} + \varphi(y)$

គេបាន $Z'_y = \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \varphi'(y) = 70e^{-0.02y}$ នាំឱ្យ $\varphi(y) = \int 70e^{-0.02y}.dy = -3500e^{-0.02y} + k$

គេទាញ $Z = -6500e^{-0.01x} - 3500e^{-0.02y} + k$ ដោយ $Z = f(0,0) = 9998 \Rightarrow k = 10000$

ដូចនេះ $Z = 10000 - 6500e^{-0.01x} - 3500e^{-0.02y}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេមាន Output : $P = f(L,K)$ ដែល L and K ជាបរិមាណ inputs ។

គេដឹងថា $\dfrac{\partial P}{\partial L} = 2.16L - 0.09L^2$ and $\dfrac{\partial P}{\partial K} = 2.36K - 0.24K^2$ ។

ឧបមាថាកាលណា $L = 0$, $K = 0 \Rightarrow P = 0$ ។ ចូររកអនុគមន៍ P ?

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ P

$\dfrac{\partial P}{\partial L} = 2.16L - 0.09L^2 \Rightarrow P = \int (2.16L - 0.09L^2).dL = 1.08L^2 - 0.03L^3 + \varphi(K)$

គេមាន $P'_K = \dfrac{\partial P}{\partial K} = \varphi'(K) = 2.36K - 0.24K^2$

គេបាន $\varphi(K) = \int (2.36K - 0.24K^2).dK = 1.68K^2 - 0.08K^3 + \lambda$

គេទាញ $P = f(K,L) = 1.08L^2 - 0.03L^3 + 1.68K^2 - 0.08K^3 + \lambda$

ដោយសម្មតិកម្ម $P = f(0,0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ។

ដូចនេះ $P = 1.08L^2 - 0.03L^3 + 1.68K^2 - 0.08K^3$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$

ក-ចូររកម៉ាទ្រីសកូហ្វាក់ទ័រ C នៃម៉ាទ្រីស A រួចទាញរក Adjoint Matrix : Adj(A) ។

ខ-គណនាដេទែមីណង់ $\det(A)=|A|$ ។

គ-ទាញរកម៉ាទ្រីសច្រាស់ A^{-1} នៃម៉ាទ្រីស A (Inverse of Matrix)

ឃ-ចូរទាញបញ្ចេញចម្លើយប្រព័ន្ធ $(S):\begin{cases}2x+y+4z=23\\ x+y+2z=13\\ 3x+y+5z=29\end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ក-រកម៉ាទ្រីសកូហ្វាក់ទ័រ C និងម៉ាទ្រីសអាហ្សង់ adj(A)

គេមាន $C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{11}=2$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}.M_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}=5-2=3$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{12}=1$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}.M_{12}=-M_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-(5-6)=1$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{13}=4$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}.M_{13}=M_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-3=-2$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{21}=1$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}.M_{21}=-M_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-5+4=-1$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{22}=1$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}.M_{22}=M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=10-12=-2$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{23}=2$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}.M_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(2-3)=1$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{31}=3$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}.M_{31}=M_{31}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-4=-2$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{32}=1$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}.M_{32}=-M_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-4=0$$

-រកកូហ្វាក់ទ័រនៃធាតុ $a_{33}=5$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}.M_{33}=M_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2-1=1$$

ដូចនេះ $C=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ -1 & -2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ និង $adj(A)=C^T=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ។

ខ-គណនាដេទែមីណង់ $\det(A)=|A|$

តាមរូបមន្ត $\det(A)=|A|=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}$

$$=2(3)+1(1)+4(-2)=6+1-8=-1$$

ដូចនេះ $\det(A)=|A|=-1$ ។

គ-ទាញរកម៉ាទ្រីសច្រាស់ A^{-1} នៃម៉ាទ្រីស A

តាមរូបមន្តគេបាន $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\times adj(A)=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$ ។

ឃ-ទាញបញ្ចេញចម្លើយប្រព័ន្ធ (S) : $\begin{cases} 2x+y+4z=23 \\ x+y+2z=13 \\ 3x+y+5z=29 \end{cases}$

តាង $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix} 23 \\ 13 \\ 29 \end{pmatrix}$

ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរជា $A.X=B \Rightarrow X=A^{-1}.B$

ដោយ $A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

គេបាន $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 23 \\ 13 \\ 29 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -69+13+58 \\ -23+26+0 \\ 46-13-29 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

ដូចនេះ $x=2$, $y=3$, $z=4$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & x & 6 \\ 7 & 8 & x+4 \end{pmatrix}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់ x ដើម្បីឱ្យ A គ្មានម៉ាទ្រីសច្រាស់ ?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត x

ដើម្បីឱ្យ A គ្មានម៉ាទ្រីសច្រាស់លុះត្រាតែវាជាម៉ាទ្រីសទោល មានន័យថា $\det(A)=0$

គេបាន $\det(A)=1.\begin{vmatrix} x & 6 \\ 8 & x+4 \end{vmatrix}-2.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & x+4 \end{vmatrix}+3.\begin{vmatrix} 4 & x \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

$=x^2+4x-48-8x-32+84+96-21x$

$=x^2-25x+100=0 \Rightarrow x_1=5$, $x_2=20$

ដូចនេះ $x\in\{\ 5\ ,\ 20\ \}$ ។

Prepared by LIM PHALKUN
Tel : 017 768 246